

MICHEL PLANCHEREL

SUR LES CONGRUENCES (mod. 2^m)

RELATIVES AU

NOMBRE DES CLASSES

DES FORMES QUADRATIQUES BINAIRES

AUX COEFFICIENTS ENTIERS ET À DISCRIMINANT NÉGATIF

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Fribourg (Suisse)
pour obtenir le grade de docteur.



PAVIA

PREM. TIPOGRAFIA SUCCESSORI FRATELLI FUSI

Largo di Via Roma, 7

1908

MICHEL PLANCHEREL

SUR LES CONGRUENCES (mod 2^m)

RELATIVES AU

NOMBRE DES CLASSES

DES FORMES QUADRATIQUES BINAIRES

AUX COEFFICIENTS ENTIERS ET À DISCRIMINANT NÉGATIF

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Fribourg (Suisse)
pour obtenir le grade de docteur.



PAVIA

PREM. TIPOGRAFIA SUCCESSORI FRATELLI FUSI

Largo di Via Roma, 7

1908

A mes Parents

en témoignage d'affection filiale



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545307_0070

Sur les congruences (mod. 2^m) relatives au nombre des classes des formes quadratiques binaires aux coefficients entiers

Le calcul direct du nombre des classes primitives des formes quadratiques binaires aux coefficients entiers, au moyen de séries rapidement convergentes (1), est abrégé considérablement par la connaissance des restes de ce nombre suivant certains modules.

La distribution en genres des classes primitives de ces formes quadratiques, montre que le nombre des classes $Cl(D)$ d'un discriminant fondamental D est divisible par $2^{\lambda-1}$, λ étant le nombre des caractères fondamentaux de D .

Des résultats plus généraux peuvent être obtenus, dans le cas particulier des discriminants fondamentaux négatifs. C'est ce qui découle des recherches de M. M. Hurwitz et Lerch.

M. Hurwitz (2) a construit un tableau des restes suivant le module 4 du nombre $h(pq)$, si $pq \equiv 3, \pmod{4}$, et suivant le module 8 de $h(pq)$, si $pq \equiv 1, \pmod{4}$ et du nombre $h(2pq)$; p, q étant des nombres premiers impairs. Le symbole $h(m)$ indique d'une manière générale le nombre des classes primitives — et positives, si $m > 0$, — du déterminant — m , dans le sens de la théorie de Gauss.

L'étude de certaines sommations a permis à M. Mathias Lerch de faire faire un progrès essentiel à ce problème. M. Lerch a non seulement retrouvé les résultats d'Hurwitz: ses méthodes s'étendent à des cas plus complexes.

(1) LERCH. — Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences t. XXXIII, n. 2, p. 47 et suiv. (Couronné en 1900).

(2) HURWITZ. — A. M. t. 19; p. 378-379 (1895).

Les notations de M. Hurwitz se rattachant à la théorie de Gauss-Dirichlet, celles de M. Lerch (1) à la théorie de Kronecker, je ne crois pas inutile de rappeler les fondements des deux théories et d'établir le passage de l'une à l'autre.

Gauss et Dirichlet considèrent des formes quadratiques

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad (a, b, c, \text{ premiers entre eux})$$

qu'ils distinguent en formes *improprement* ou *proprement primitives* selon que, $a, 2b, c$ admettent ou non le plus grand commun diviseur 2. La quantité

$$-m = b^2 - ac$$

s'appelle le *déterminant* de la forme et est un invariant. $h(m)$ indique le nombre des classes proprement primitives — et positives, si $m > 0$, — du déterminant $-m$; $h'(m)$ le nombre des classes improprement primitives.

Dans la théorie de Kronecker, acceptée par M M. H. Weber et M. Lerch, et à laquelle nous nous rattachons dans ce travail, on envisage des formes

$$ax^2 + bxy + cy^2, \quad (a, b, c \text{ premiers entre eux.})$$

où le coefficient b n'est pas nécessairement pair. L'invariant

$$D = b^2 - 4ac$$

s'appelle alors le *discriminant* de la forme. En retenant l'écriture (a, b, c) pour indiquer les formes de Kronecker, les formes de Gauss seront du type $(a, 2b, c)$; le déterminant $-m$ sera ici le quart du discriminant $(2b)^2 - 4ac = -4m$.

Le nombre des classes primitives — et positives, si $D < 0$ — qui correspondent au discriminant D étant désigné par $Cl(D)$,

(1) LERCH. — Mémoire cité p. 170-208. voir aussi A. M. t. 30. p. 260-279.

on aura ainsi

$$h(m) = Cl(-4m).$$

L'étude du nombre $h(m)$ revient ainsi à celle de $Cl(D)$ pour des discriminants pairs. Les discriminants impairs sont introduits par les formes improprement primitives qui n'existent que si $m \equiv 3, \pmod{4}$ de sorte que

$$h'(m) = Cl(-m)$$

Dans le cas des discriminants négatifs, la formule connue

$$h(\Delta) = Cl(-4\Delta) = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta), \quad (\Delta \equiv 3, \pmod{4}),$$

ramène le calcul de $h'(m)$ à celui de $h(m)$.

Voici maintenant les tableaux d'Hurwitz; p et q sont deux nombres premiers impairs.

Table des restes de $h_g(pq)$ suivant le module 2.

	$q \equiv 1$	$q \equiv 3$	$q \equiv 5$	$q \equiv 7$
$p \equiv 1$	0	ε	ε	ε
$p \equiv 3$	ε	1	ε	ε
$p \equiv 5$	ε	ε	0	ε
$p \equiv 7$	ε	$1 - \varepsilon$	ε	0

Table des restes de $\frac{1}{4} h(2pq)$ suivant le module 2.

	$q \equiv 1$	$q \equiv 3$	$q \equiv 5$	$q \equiv 7$
$p \equiv 1$	0	ε	ε	0
$p \equiv 3$	ε	0	1	ε
$p \equiv 5$	ε	1	1	ε
$p \equiv 7$	0	$1 - \varepsilon$	ε	0

Dans le premier tableau, $h_g(pq)$ indique le nombre des classes de formes primitives et positives du déterminant $-pq$ qui sont contenues dans un seul genre. On a

$$h_g(pq) = \frac{1}{2} h(pq), \text{ si } pq \equiv 3, \pmod{4},$$

$$h_g(pq) = \frac{1}{4} h(pq), \text{ si } pq \equiv 1, \pmod{4}.$$

ε est ici une abbréviation pour $\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{p}{q} \right) \right)$; on a donc $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$ selon que p est résidu ou non-résidu de q . Le reste de $h_g(pq)$ ou de $\frac{1}{4} h(2pq)$ s'obtient immédiatement, ρ et σ étant les plus petits restes positifs de p et q pour le module 8, par l'intersection des lignes horizontales et verticales des deux tableaux, relatives à ρ et σ .

Comme $2 - \left(\frac{2}{\Delta} \right) \equiv \left(\frac{2}{\Delta} \right), \pmod{4}$, pour Δ impair,

on tire du premier tableau d'Hurwitz les restes suivant le module 4, des nombres $Cl(-pq)$, ainsi que les restes de $Cl(-4pq)$ ($pq \equiv 1, (\text{mod. } 4)$) pour le module 8. Le deuxième tableau donne les restes de $Cl(-8pq)$ pour le module 8.

Les méthodes de M. Lerch retrouvent non seulement les résultats d'Hurwitz sous une forme plus condensée; elles ont le grand avantage de permettre l'extension des recherches au cas où le discriminant est composé d'un nombre quelconque de facteurs premiers. M. Lerch a lui-même calculé les congruences relatives à $Cl(-\Delta)$ pour Δ positif impair, produit de 3, 4 facteurs premiers.

Le présent travail a été entrepris sur les conseils de M. le Prof. Lerch et je me fais un devoir de le remercier ici pour le bienveillant intérêt qu'il lui a toujours accordé. On y trouvera en plus de l'établissement des formules générales de congruences, une application concrète au calcul des restes de $Cl(-\Delta)$, pour le module 32, Δ étant composé de 5 facteurs premiers impairs différents, de $Cl(-8P)$ et $Cl(-4D)$, pour le module 16 dans le cas de 3 facteurs premiers impairs. J'y établis encore un théorème fondamental reliant les restes relatifs à un discriminant fondamental négatif impair $-p\Delta$, aux restes relatifs au discriminant -8Δ , p étant premier.

Avant d'aborder mon sujet, il me sera permis d'indiquer rapidement quelques notations et quelques formules qui seront d'un emploi continu.

1. Le symbole $\mu(n)$ est défini par les relations

$$\begin{aligned}\mu(1) &= 1, \\ \mu(n) &= 0, \text{ si } n \text{ admet un diviseur carré,} \\ \mu(n) &= (-1)^p, \text{ si } n \text{ est produit de } p \text{ facteurs pre-}\end{aligned}$$

miers différents.

On a les relations importantes

$$\sum_{\delta|n} \mu(\delta) = 0, \quad n > 1 \quad (1)$$

δ parcourant tous les diviseurs du nombre n supposé plus grand que 1.

$$\sum_{h=0}^u \left(\frac{Q^2}{h} \right) f(h) = \sum_{d|Q} \mu(d) \sum_{h=0}^{\frac{U}{d}} f(hd), \quad (2)$$

dans laquelle d parcourt tous les diviseurs de Q ; $\left(\frac{m}{n} \right)$ représente ici le symbole de Legendre, généralisé par Jacobi et Kronecker. On peut, dans cette formule, passer à la limite $u = \infty$, si la convergence des séries qui y figurent est assurée.

2. $\Phi(\Delta)$ représente le nombre des nombres premiers avec Δ et inférieurs à Δ . Soit

$$\Delta = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$$

la décomposition de Δ en ses facteurs premiers; on a,

$$\Phi(\Delta) = \Delta \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m} \right)$$

On a encore,

$$\sum_{\delta|\Delta} \Phi(\delta) = \Delta. \quad (3)$$

(δ parcourt les diviseurs de Δ).

Nous représenterons encore par $\Phi(\Delta, x)$ le nombre des nombres premiers avec Δ et inférieurs ou égaux à x . On a,

$$\Phi(\Delta, x) = \sum_{\delta|\Delta} \mu(\delta) \left[\frac{x}{\delta} \right], \quad \left(\left[\frac{x}{\delta} \right] = \text{partie entière de } \frac{x}{\delta} \right)$$

(δ parcourt les diviseurs de Δ)

dont voici quelques cas particuliers, pour Δ impair,

$$\Phi\left(\Delta, \frac{\Delta}{4}\right) = \frac{1}{4} \Phi(\Delta) + \frac{1}{4} \sum_{\delta\delta'=\Delta} (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} \mu(\delta)$$

$$\Phi \left(\Delta, \frac{\Delta}{2} \right) = \frac{1}{2} \Phi (\Delta) \quad (4)$$

$$\Phi (4\Delta, \Delta) = \frac{1}{4} \Phi (4\Delta)$$

3. Nous aurons souvent à considérer des produits

$$\prod_q \left(1 - \left(\frac{D}{q} \right) \right), \quad (D \text{ discriminant})$$

q parcourant les facteurs premiers différents d'un nombre donné Q . Nous les désignerons, pour abréger, par (D, Q) et écrirons :

$$(D, Q) = \prod_q \left(1 - \left(\frac{D}{q} \right) \right), \quad (D \text{ discriminant}) \quad (5)$$

avec la convention $(D, 1) = 1$.

4. Un discriminant est dit *fondamental*, lorsqu'il ne contient aucun carré impair, et lorsqu'il perd sa qualité de discriminant, si, contenant éventuellement le carré pair 4, on le lui enlève. Tout discriminant est donc de la forme $D_0 Q^2$, Q étant un entier et D_0 un discriminant fondamental. D_0 peut avoir une des trois formes suivantes

$$P, 4P, \pm 8P.$$

P étant un nombre impair congru à 1 pour le module 4.

Je rappellerai les formules

$$\sum_{v=1}^{D-1} \left(\frac{D}{v} \right) \frac{v}{D} = 0, \text{ si } D \text{ discriminant positif.} \quad (6)$$

$$- \sum_{v=1}^{D-1} \left(\frac{-\Delta}{v} \right) \frac{v}{\Delta} = \frac{2}{\tau_0} \text{Cl.} (-\Delta_0) (-\Delta_0, Q), \quad (7)$$

$(\Delta = \Delta_0 Q^2, -\Delta_0 \text{ étant un discriminant fondamental négatif}).$

$$\left[\frac{1}{4} D \right] \sum_{\nu=1} \left(\frac{D}{\nu} \right) = \frac{1}{2} \text{Cl}(-4D), (D \text{ discriminant fondam. positif}). \quad (8)$$

$$\left[\frac{1}{4} \Delta \right] \sum_{\nu=1} \left(\frac{-\Delta}{\nu} \right) = \frac{2 - \left(\frac{4}{\Delta} \right) + \left(\frac{2}{\Delta} \right)}{\tau} \text{Cl}(-\Delta), \quad (9)$$

($-\Delta$ discriminant fondam. négatif, ≥ -4)

τ a dans ces formules la valeur suivante :

$\tau=6$, pour $D=-3$; $\tau=4$, pour $D=-4$; $\tau=2$, pour $D < -4$.

5. Nous désignerons toujours, dans la suite, à moins de mention contraire expresse, par p, q des nombres premiers satisfaisant aux congruences

$$-p \equiv q \equiv 1, \pmod{4} \quad (10)$$

6. Nous conviendrons de même que $\sum_{\delta \in (D)}$ représente une sommation étendue à tous les diviseur δ du nombre Δ .

I.

$D_1, D_2, \dots, D_m$ étant des discriminants fondamentaux premiers entre eux, de valeurs absolues $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$; $D = D_1 D_2 \dots D_m$, $\Delta = |D|$, je considère la somme

$$S = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu} \right) \left(1 + \left(\frac{D_1}{\nu} \right) \right) \left(1 + \left(\frac{D_2}{\nu} \right) \right) \dots \left(1 + \left(\frac{D_m}{\nu} \right) \right) \frac{\nu}{\Delta}. \quad (11)$$

On peut l'écrire, en effectuant les produits,

$$S = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D^2}{\nu} \right) \frac{\nu}{\Delta}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{A-1} \sum_{a=1}^m \sum_{r_1 \dots r_a} \left(\frac{D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a} \Delta_{r_a+1}^2 \dots \Delta_{r_m}^2}{\nu} \right) \frac{\nu}{\Delta},$$

où $r_1 \dots r_a$ parcourent toutes les combinaisons a à a des m objets $1, 2, \dots, m$.

Le calcul de S se ramène donc au calcul de

$$S_0 = \sum_{\nu=1}^{A-1} \left(\frac{D^2}{\nu} \right) \frac{\nu}{\Delta}$$

qu'une substitution $(\nu \mid \Delta - \nu)$ montre être égal à $\frac{1}{2} \Phi(\Delta)$,

et de termes de la forme

$$A = \sum_{\nu=1}^{A'Q-1} \left(\frac{D' Q^2}{\nu} \right) \frac{\nu}{\Delta' Q'}$$

où $D' = D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}$, $\Delta' = |D'|$; $Q = \Delta_{r_a+1} \Delta_{r_a+2} \dots \Delta_{r_m}$.

La substitution

$$\nu = \rho + \Delta' Q \mu, \quad (\rho = 1, 2, \dots, \Delta' Q; \mu = 0, 1, 2, \dots, Q-1)$$

dans $\sum_{\nu=1}^{A'Q^2} \left(\frac{D' Q^2}{\nu} \right) \frac{\nu}{\Delta' Q^2}$, montre que cette dernière expression est égale à A .

$$A = \sum_{\nu=1}^{A' Q^2} \left(\frac{D' Q^2}{\nu} \right) \frac{\nu}{\Delta' Q^2}$$

Le second membre a ici une valeur connue. On a, en effet, (7), et (6)

$$\text{pour } D' < 0, \quad - \sum_{\nu=1}^{A' Q^2} \left(\frac{D' Q^2}{\nu} \right) \frac{\nu}{\Delta' Q^2} = (D', Q) \frac{2}{\tau'} \text{Cl}(D')$$

$$\text{et pour } D' > 0, \quad \sum_{\nu=1}^{A' Q^2} \left(\frac{D' Q^2}{\nu} \right) \frac{\nu}{\Delta' Q^2} = 0.$$

Convenons d'écrire

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{2}{\tau} Cl(D), \text{ si } D < 0. \\ P(D) &= 0, \quad \text{si } D > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Par suite,

$$A = - (D', Q) P(D')$$

La substitution de ces résultats dans (11), nous donne

$$S = \frac{1}{2} \Phi(\Delta) -$$

$$\sum_{a=1}^m \sum_{r_1 \dots r_a} (D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) P(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}). \quad (13)$$

Si maintenant, on remarque que l'expression

$$\left(\frac{D}{\nu}\right) \left(1 + \left(\frac{D_1}{\nu}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{D_2}{\nu}\right)\right) \dots \left(1 + \left(\frac{D_m}{\nu}\right)\right)$$

est égale à 2^m , si

$$\left(\frac{D_1}{\nu}\right) = \left(\frac{D_2}{\nu}\right) = \dots = \left(\frac{D_m}{\nu}\right) = 1$$

et qu'elle est nulle, dans les autres cas, on écrira (11)

$$S = \frac{2^m}{\Delta} \sum_1^{\Delta}{}^* s,$$

l'astérisque indiquant que la sommation doit être étendue aux valeurs de s satisfaisant aux conditions

$$\left(\frac{D_1}{s}\right) = \left(\frac{D_2}{s}\right) = \dots = \left(\frac{D_m}{s}\right) = 1 \quad (14)$$

$$0 < s < \Delta$$

Cette manière d'écrire donne

$$\frac{1}{2} \Phi(\Delta) - \frac{2^m}{\Delta} \sum_1^{\Delta}{}^* s =$$

$$\sum_{a=1}^m \sum_{r_1 \dots r_a} (D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) P(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}) \quad (15)$$

Etudions quelques conséquences de cette formule

1. Soit $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \equiv \dots \equiv \Delta_m \equiv 1, \pmod{4}$.

Tous les discriminants $D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}$ sont positifs, le second membre de (15) est donc nul, et

$$\sum_1^A s^* = \frac{D \Phi(D)}{2^{m+1}} \quad (16)$$

Quand $D_1, D_2, \dots, D_m$ sont des nombres premiers, ce résultat s'énonce:

La somme des résidus d'un discriminant fondamental positif D , produit de m discriminants positifs premiers, inférieurs à D et premiers avec lui, est égale à $\frac{D \Phi(D)}{2^{m+1}}$.

2. Nous supposons dorénavant $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ premiers. On a alors,

$$\frac{1}{2} \Phi(\Delta) \equiv 0, \pmod{2^{m-1}}.$$

Le premier membre de (15) est donc divisible par 2^{m-1} .

Faisant $m = 2$, dans (15), on aurait

$$P(D_1 D_2) + (D_1, \Delta_2) P(D_1) + (D_2, \Delta_1) P(D_2) \equiv 0, \pmod{2} \quad (a)$$

Les quantités $(D_1, \Delta_2), (D_2, \Delta_1)$ sont congrues à zéro pour le module 2. De plus, si D_1 et D_2 sont différents de -3 , les nombres $P(D_1)$ et $P(D_2)$ sont entiers. En excluant d'abord le cas où l'un des discriminants D_1, D_2 est égal à -3 , on a immédiatement:

$$P(D_1 D_2) \equiv 0, \pmod{2}. \quad (b)$$

Il est facile de lever l'exception indiquée. Supposons, pour fixer les idées, $D_1 = -3$; τ_2 étant égal à 6 et $\text{Cl}(-3)$ à 1, il vient,

$$P(D_1) = \frac{2}{\tau} Cl(-3) = \frac{1}{3}$$

Il suffit de multiplier les deux membres de (a) par 3, pour voir que la congruence (b) subsiste encore ici. Elle est donc générale.

Pour $m = 3$, on trouverait de même,

$$P(D_1 D_2 D_3) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 4).$$

Du fait que $(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m})$ est divisible (5) par 2^{m-a} , on généralise immédiatement pour m quelconque: il vient

$$P(D_1 D_2 \dots D_m) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2^{m-1}). \quad (17)$$

Si $D_1 D_2 \dots D_m$ est négatif, le résultat s'énonce, (12):

Le nombre des classes d'un discriminant fondamental négatif impair, est divisible par 2^{m-1} , m étant le nombre de ses facteurs premiers. Il exprime un cas particulier de la théorie des genres.

3. On a les congruences

$$(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2^{m-a}),$$

$$P(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2^{a-1}).$$

Notons encore que

$$2^{m-1} \equiv -2^{m-1} \pmod{2^m}.$$

Alors l'équation (15) donne

$$\begin{aligned} P(D_1 D_2 \dots D_m) &\equiv \frac{1}{2} \Phi(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m) \\ &+ \sum_{a=1}^{m-1} \sum_{r_1 \dots r_a} (D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) P(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}), \\ &\quad (1) \quad (\text{mod. } 2^m) \end{aligned} \quad (18)$$

(1) La relation est inexacte, si l'un des D_{r_a} est égal à -3 . Elle subsiste si nous convenons de prendre $P(-3) = 1$, ce que nous ferons désormais.

Cette formule importante sert de point de départ pour la recherche des congruences, dans le cas des discriminants négatifs impairs.

Pour $m = 1$, elle donne

$$P(D_1) \equiv \frac{1}{2} \Phi(\Delta_1), \quad (\text{mod. } 2).$$

Pour $m = 2$,

$$\begin{aligned} P(D_1 D_2) &\equiv \frac{1}{2} \Phi(\Delta_1 \Delta_2) + (D_1, \Delta_2) P(D_1) \\ &\quad + (D_2, \Delta_1) P(D_2), \quad (\text{mod. } 4). \end{aligned}$$

ou encore, par substitution des restes de $P(D_1)$ et $P(D_2)$ pour le module 2

$$\begin{aligned} P(D_1 D_2) &\equiv \frac{1}{2} \left[\Phi(\Delta_1 \Delta_2) + (D_1, \Delta_2) \Phi(\Delta_1) \right. \\ &\quad \left. + (D_2, \Delta_1) \Phi(\Delta_2) \right], \quad (\text{mod. } 4). \end{aligned}$$

De même, pour $m = 3$, on aurait suivant le module 8

$$\begin{aligned} P(D_1 D_2 D_3) &\equiv \frac{1}{2} \Phi(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (D_{\beta} D_{\gamma}, \Delta_{\alpha}) \Phi(\Delta_{\beta} \Delta_{\gamma}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (D_{\alpha} | D_{\beta}, D_{\gamma}) \Phi(\Delta_{\alpha}), \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Le symbole $(D_{\alpha} | D_{\beta}, D_{\gamma})$ remplace ici l'expression

$$(D_{\alpha} D_{\beta}, \Delta_{\gamma}) (D_{\alpha}, \Delta_{\beta}) + (D_{\alpha} D_{\gamma}, \Delta_{\beta}) (D_{\alpha}, \Delta_{\gamma}) + (D_{\alpha}, \Delta_{\beta} \Delta_{\gamma})$$

Pour exprimer d'une manière analogue $P(D_1 D_2 \dots D_m)$, définissons le symbole $(D_1 D_2 \dots D_x | D_{x+1}, \dots, D_m)$ par la relation de récurrence

$$(D_1 D_2 \dots D_x | D_{x+1}, \dots, D_m) =$$

$$\sum_{\mu=0}^{m-a-1} \sum_{\rho} (D_1 D_2 \dots D_a D_{\rho_{a+1}} \dots D_{\rho_{a+\mu}} \Delta_{\rho_{a+\mu+1}} \dots \Delta_{\rho_m}) \\ (D_1 D_2 \dots D_a \mid D_{\rho_{a+1}}, \dots, D_{\rho_{a+\mu}}) \quad (19)$$

la sommation s'étendant à toutes les combinaisons μ à μ

$$D_{\rho_{a+1}} D_{\rho_{a+2}} \dots D_{\rho_{a+\mu}}$$

prises parmi les $m - a$ objets $D_{a+1}, D_{a+2}, \dots, D_m$; μ variant de 0 à $m - a - 1$.

Cela posé, on a

$$P(D_1 D_2 \dots D_m) \equiv \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{a=1}^m \sum_{r_1 \dots r_a} (D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a} \mid D_{r_{a+1}}, \dots, D_{r_m}) \Phi(\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a}), \\ & \quad (\text{mod. } 2^m) \\ & \quad (\text{nous convenons } (D_1 D_2 \dots D_m \mid) = 1) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Cette relation est vraie pour $m = 1, 2, 3$ comme le montrent les congruences écrites plus haut. Il suffira donc, pour l'établir, de démontrer que si elle est vraie pour $m - 1$ facteurs, elle l'est encore pour m . A cet effet, remplaçons, dans (18) toutes les expressions $P(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a})$ où $a \leq m - 1$, par leurs restes (mod. 2^a) tirés de (20). Il vient, pour le module 2^m .

$$P(D_1 D_2 \dots D_m) \equiv \frac{1}{2} \Phi(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m) \\ + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{m-1} \sum_r (D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a} \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) \\ \sum_{v=1}^a \sum_{\rho} (D_{\rho_1} D_{\rho_2} \dots D_{\rho_v} \mid D_{\rho_{v+1}}, \dots, D_{\rho_a}) \Phi(\Delta_{\rho_1} \Delta_{\rho_2} \dots \Delta_{\rho_v});$$

(les $D_{\rho_1}, D_{\rho_2}, \dots, D_{\rho_v}$ parcourent toutes les combinaisons v à v formées au moyen de $D_{r_1}, D_{r_2}, \dots, D_{r_a}$).

Intervertissons l'ordre des sommations. Le second membre

devient

$$\frac{1}{2} \Phi (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m) \\ + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{m-1} \sum_{a=v}^{m-1} \sum_{\rho, \sigma} (D_{\rho_1} D_{\rho_2} \dots D_{\rho_v} D_{\rho_{\sigma_v+1}} \dots D_{\rho_{\sigma_a}}, \Delta_{\rho_{\sigma_a+1}} \dots \Delta_{\rho_{\sigma_m}}) \\ (D_{\rho_1} D_{\rho_2} \dots D_{\rho_v} | D_{\rho_{\sigma_v+1}}, \dots, D_{\rho_{\sigma_a}}) \Phi (\Delta_{\rho_1} \Delta_{\rho_2} \dots \Delta_{\rho_v});$$

c'est à dire, d'après (19)

$$\frac{1}{2} \sum_{v=1}^m \sum_{\rho_1 \dots \rho_v} (D_{\rho_1} D_{\rho_2} \dots D_{\rho_v} | D_{\rho_{v+1}}, \dots, D_{\rho_m}) \Phi (\Delta_{\rho_1} \Delta_{\rho_2} \dots \Delta_{\rho_v}),$$

qui n'est autre, à part un léger changement de notation, que le second membre de (20). La relation (20), vraie pour $m-1$ facteurs, l'est encore pour m : elle est ainsi démontrée pour toute valeur de m .

D'après la supposition, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ sont des nombres premiers impairs; aussi

$$\frac{1}{2} \Phi (\Delta_\mu) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{-4}{\Delta_\mu} \right) \right), \pmod{2}$$

Comme

$$\frac{1}{2} \Phi (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m) = \frac{1}{2} (\Delta_1 - 1) (\Delta_2 - 1) \dots (\Delta_m - 1),$$

on aura

$$\frac{1}{2} \Phi (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m) \equiv \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{-4}{\Delta_1} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{-4}{\Delta_2} \right) \right) \dots \left(1 - \left(\frac{-4}{\Delta_m} \right) \right), \pmod{2^m}. \\ (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m, \text{ nombres premiers impairs différents}).$$

La présence d'un seul facteur Δ_μ de la forme $4n+1$ entraîne $\left(\frac{-4}{\Delta_\mu} \right) = 1$, et $\frac{1}{2} \Phi (\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m)$ est dans ce cas divisible par 2^m .

Nous pouvons donc, en nous servant de (20) dans le calcul du reste de $Cl(-p_1 p_2 \dots p_{2m+1} q_1 q_2 \dots q_n)$, négliger les termes où figurent dans $\Phi(\)$ un ou plusieurs facteurs q (10); il vient simplement

$$Cl(-p_1 p_2 \dots p_{2m+1} q_1 q_2 \dots q_n) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{2m+1} \sum_r \left((-1)^\mu p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_\mu} \mid -p_{r_{\mu+1}}, \dots, -p_{r_{2m+1}}, q_1, q_2, \dots, q_n \right) \Phi(p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_\mu}), \pmod{2^{2m+n+1}} \quad (21)$$

En particulier,

$$Cl(-p q_1 q_2 \dots q_m) \equiv (-p \mid q_1, q_2, \dots, q_m), \pmod{2^{m+1}}. \quad (22)$$

Passons aux applications de ces différentes formules. La formule (18) a permis à M. M. Lerch (1) d'obtenir les résultats suivants:

$$m=2 \quad Cl(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{p}{q}\right), \pmod{4}. \quad (23)$$

Ce résultat est contenu dans le premier tableau d'Hurwitz (v. page 267). Pour le module 8,

$$m=3 \quad Cl(-p_1 p_2 p_3) \equiv -1 + \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) + \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right) + \left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right), \quad (24)$$

$$Cl(-p q_1 q_2) \equiv \left(1 - \left(\frac{q_1}{p}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{q_2}{p}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{q_1 q_2}{p}\right)\right)$$

$m=4$. On a, pour le module 16,

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv \begin{cases} 2 \left[-1 + \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) + \left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right) + \left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right) \right], & \text{si } \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q}\right) = -1, \\ 4 \left(1 - \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) \right), & \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right) = 1, \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1, \\ 0, & \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = 1. \end{cases} \quad (25)$$

(1) LERCH. — Sav. Etrang. t. XXXIII, n. 2, p. 192-195.
Acta Math. t. 30, p. 264-273.

$$Cl(-pq_1q_2q_3) \equiv \begin{cases} 2(1-\varepsilon)(1+\eta), & \text{si } \left(\frac{q_1}{p}\right) = \left(\frac{q_2}{p}\right) = \left(\frac{q_3}{p}\right) = \varepsilon, \\ 2(1+\varepsilon)(1-\eta\eta_1\eta_2) + 4(1-\eta_1\eta_2), \\ \text{si } \left(\frac{q_1}{p}\right) = \left(\frac{q_2}{p}\right) = -\left(\frac{q_3}{p}\right) = \varepsilon. \end{cases}$$

Les notations sont ici

$$\eta = \left(\frac{q_\beta}{q_\gamma}\right), (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3); \quad \eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{|\eta_1 + \eta_2 + \eta_3|} = \text{sgn.}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3).$$

$m=5$. Nous aurons des congruences pour le module 32. Il y a trois discriminants négatifs types, produits de 5 facteurs premiers impairs différents :

$$-p_1p_2p_3p_4p_5, \quad -p_1p_2p_3q_1q_2, \quad -pq_1q_2q_3q_4.$$

Notre recherche se divise ainsi naturellement en trois parties.

I. $m=5$, $D_1=-p_1$, $D_2=-p_2$, $D_3=-p_3$, $D_4=-p_4$, $D_5=-p_5$.

$p_1, p_2, \dots, p_5$ sont des nombres premiers de la forme $4n+3$. On peut former avec ces nombres 10 discriminants négatifs du type $-p_\alpha p_\beta p_\gamma$.

Il vient donc, pour le module 32, d'après la formule (18),

$$Cl(-p_1p_2p_3p_4p_5) \equiv 16 + \sum_{\delta, \varepsilon} \left(1 + \left(\frac{p_\alpha p_\beta p_\gamma}{p_\delta}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{p_\alpha p_\beta p_\gamma}{p_\varepsilon}\right)\right) Cl(-p_\alpha p_\beta p_\gamma) \\ + \sum_z \left(1 + \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{p_\gamma}{p_\gamma}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{p_\alpha}{p_\delta}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{p_\gamma}{p_\varepsilon}\right)\right) Cl(-p_\alpha) \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$Cl(-p_\alpha)$ est impair; nous substituerons à $Cl(-p_\alpha p_\beta p_\gamma)$ son reste, (mod. 8) $-1 + \left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p_\gamma}\right) + \left(\frac{p_\gamma p_\gamma}{p_\beta}\right) + \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right)$. Il ne reste plus qu'à discuter le résultat obtenu, sous différentes hypothèses: les résultats se présentent assez simplement dans chaque cas particulier; on réunit ensuite ensemble les cas

voisins par des formules condensées que nous donnerons ci-dessous (1).

Abrégeons l'écriture, en notant

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \eta_2, \left(\frac{p_2}{p_3}\right) = \eta_1, \left(\frac{p_3}{p_4}\right) = \eta_2, \left(\frac{p_4}{p_5}\right) = \eta_1;$$

$$\sigma = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3; \Delta = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5.$$

Représentons encore par le schéma

$$\begin{pmatrix} \pm & \pm & \pm \\ \pm & \pm & \pm \end{pmatrix}$$

l'ensemble des conditions

$$\begin{aligned} \pm \left(\frac{p_1}{p_2}\right) &= \pm \left(\frac{p_2}{p_3}\right) = \pm \left(\frac{p_3}{p_4}\right) = \varepsilon_1 \\ \pm \left(\frac{p_1}{p_5}\right) &= \pm \left(\frac{p_2}{p_5}\right) = \pm \left(\frac{p_3}{p_5}\right) = \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1).$$

Par exemple

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

représente les conditions

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_1}{p_2}\right) &= \left(\frac{p_2}{p_3}\right) = - \left(\frac{p_3}{p_4}\right) = \varepsilon_1, \\ \left(\frac{p_1}{p_5}\right) &= - \left(\frac{p_2}{p_5}\right) = \left(\frac{p_3}{p_5}\right) = \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Nous aurons le tableau suivant de restes pour le module 32.

(1) Nous n'avons pas incorporé les calculs dans le texte. Le lecteur trouvera dans l'Appendice les détails nécessaires sur la méthode à suivre pour obtenir les résultats des formules (26, 27, 28).

$$1. \quad \begin{pmatrix} + & , & + & , & + \\ + & , & + & , & + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-\Delta) \equiv 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_1 \mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right).$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} + & , & + & , & - \\ + & , & + & , & + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-\Delta) \equiv 2(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) (1 - \varepsilon_1 \mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) + 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_1 \mu) (1 + \eta_1 \eta_2). \quad (26)$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} + & , & + & , & - \\ + & , & + & , & - \end{pmatrix}$$

$$Cl(-\Delta) \equiv (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) (1 + \eta_1 \eta_2) [(1 + \eta_1 \eta_3) (1 + \varepsilon_1 \mu) + 2(1 - \eta_1 \eta_3)].$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} + & , & + & , & - \\ + & , & - & , & + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-\Delta) \equiv 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) [(1 + \varepsilon_1 \mu) (1 - \varepsilon_1 \eta_1) + (1 - \varepsilon_1 \mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \varepsilon_1 \eta_1 \right) + 2(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) [(1 + \varepsilon_1 \mu) (1 + \varepsilon_1 \eta_2) + (1 - \varepsilon_1 \mu) (1 - \varepsilon_1 \eta_1)].$$

II. $m=5$, $D_1=-p_1$, $D_2=-p_2$, $D_3=-p_3$, $D_4=q_1$, $D_5=q_2$

Les p , q sont des nombres premiers, les premiers de la forme $4n+3$, les seconds de la forme $4n+1$. Ces nombres forment 2 discriminants négatifs du type $-p_1 p_2 p_3 q_\alpha$ ($\alpha=1, 2$), trois du type $-p_\alpha q_1 q_2$ ($\alpha=1, 2, 3$). Si l'on ajoute $-p_1 p_2 p_3$, $-p_1 p_2 p_3 q_1 q_2$, on aura tous les discriminants fondamentaux négatifs résultant d'une combinaison des p , q . La formule (18) donnera donc, pour le module 32

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q_1 q_2) \equiv \sum_{\alpha, \beta=1, 2} \left(1 - \left(\frac{p_1 p_2 p_3 q_\alpha}{q_\beta} \right) \right) Cl(-p_1 p_2 p_3 q_\alpha) + \left(1 - \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q_1} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q_2} \right) \right) Cl(-p_1 p_2 p_3)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \left(1 + \left(\frac{p_\alpha q_1 q_2}{p_\beta} \right) \right) \left(1 + \left(\frac{p_\alpha q_1 q_2}{p_\gamma} \right) \right) Cl(-p_\alpha q_1 q_2) \\
& + \sum_{\alpha, \sigma} \left(1 + \left(\frac{p_\alpha q_\sigma}{p_\beta} \right) \right) \left(1 + \left(\frac{p_\alpha q_\sigma}{p_\gamma} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{p_\alpha q_\sigma}{q_\rho} \right) \right) Cl(-p_\alpha q_\sigma) \\
& + \sum_{\alpha} \left(1 + \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta} \right) \right) \left(1 + \left(\frac{p_\alpha}{p_\gamma} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q_1} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q_2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Le calcul des différents cas donne, en faisant usage des abréviations

$$\left(\frac{p_1}{p_2} \right) = \eta_1, \left(\frac{p_2}{p_3} \right) = \eta_1, \left(\frac{p_3}{p_1} \right) = \eta_2, \left(\frac{q_1}{q_2} \right) = \mu,$$

$$\sigma = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \Delta = p_1 p_2 p_3 q_1 q_2$$

et en se servant du schéma $\begin{pmatrix} \pm & \pm & \pm \\ \pm & \pm & \pm \end{pmatrix}$ pour indiquer les conditions

$$\begin{aligned}
\pm \left(\frac{p_1}{q_1} \right) &= \pm \left(\frac{p_2}{q_1} \right) = \pm \left(\frac{p_3}{q_1} \right) = \varepsilon_1, \\
&\quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1) \\
\pm \left(\frac{p_1}{q_2} \right) &= \pm \left(\frac{p_2}{q_2} \right) = \pm \left(\frac{p_3}{q_2} \right) = \varepsilon_2,
\end{aligned}$$

le tableau suivant de congruences (mod. 32)

$$1 \quad \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-\Delta) \equiv 2 \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) [(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \mu)]$$

$$2 \quad \begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-\Delta) \equiv \begin{cases} 4(1-\mu)(1+\varepsilon_1\varepsilon_2) + 4(1-\varepsilon) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q_1}\right) = \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q_2}\right) = \varepsilon, \\ 4(1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right) + 4(1-\varepsilon)(1+\varepsilon_1\varepsilon_2), & \text{si } \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q_1}\right) = -\left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q_2}\right) = -\varepsilon. \end{cases}$$

3

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & - \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$Cl(-\Delta) \equiv 2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right) \\ + 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[2(1+\varepsilon_1\varepsilon_2) + (1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right)\right].$$

4

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-\Delta) \equiv 2(1+\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[(1-\varepsilon_1\mu)(1+\varepsilon_2\varepsilon_3) + (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2\varepsilon_3) + (1+\varepsilon_2) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right) \right] \\ + 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[(1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right) + 2(1+\varepsilon_1\varepsilon_2) \right]$$

α doit être pris tel que $\left(\frac{p_\alpha}{q_1}\right) = \left(\frac{p_\alpha}{q_2}\right) = -1$.

III. $m=5$, $D_1=-p$, $D_2=q_1$, $D_3=q_2$, $D_4=q_3$, $D_5=q_4$.

Les p, q sont des nombres premiers différents; p est de la forme $4n+3$, les q de la forme $4n+1$. A part $-pq_1q_2q_3q_4$, ces nombres donnent naissance à 15 discriminants négatifs; 4 d'entre eux sont de la forme $-pq_\alpha q_\beta q_\gamma$; 6 autres, de la forme $-pq_\alpha q_\beta$; 4, du type $-pq_\alpha$. Le dernier est $-p$. On aura, pour le module 32:

$$\begin{aligned}
Cl(-pq_1 q_2 q_3 q_4) &\equiv \sum_{\alpha} \left(1 - \left(\frac{pq_{\beta} q_{\gamma} q_{\delta}}{q_{\alpha}}\right)\right) Cl(-pq_{\beta} q_{\gamma} q_{\delta}) \\
&+ \sum_{\alpha, \beta} \left(1 - \left(\frac{pq_{\gamma} q_{\delta}}{q_{\alpha}}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{pq_{\gamma} q_{\delta}}{q_{\beta}}\right)\right) Cl(-pq_{\gamma} q_{\delta}) + \\
&+ \sum_{\alpha} \left(1 - \left(\frac{pq_{\alpha}}{q_{\beta}}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{pq_{\alpha}}{q_{\gamma}}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{pq_{\alpha}}{q_{\delta}}\right)\right) Cl(-pq_{\alpha}) \\
&+ \prod_{\alpha} \left(1 - \left(\frac{q_{\alpha}}{p}\right)\right). \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}$$

En se servant des restes (mod. 4, 8, 16) des différents nombres de classes (voir form. 25, 26, 27), en notant les abréviations

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = \eta, \left(\frac{q_2}{q_3}\right) = \eta_1, \left(\frac{q_3}{q_4}\right) = \eta_2, \left(\frac{q_4}{p}\right) = \mu;$$

$$\sigma = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3; \quad \eta = \text{sgn}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3); \quad \Delta = pq_1 q_2 q_3 q_4.$$

et le schéma $\begin{pmatrix} \pm & \pm & \pm \\ \pm & \pm & \pm \end{pmatrix}$ pour les conditions

$$\pm \left(\frac{q_1}{p}\right) = \pm \left(\frac{q_2}{p}\right) = \pm \left(\frac{q_3}{p}\right) = \varepsilon_1,$$

$$\pm \left(\frac{q_1}{q_4}\right) = \pm \left(\frac{q_2}{q_4}\right) = \pm \left(\frac{q_3}{q_4}\right) = \varepsilon_2,$$

on pourra résumer la discussion dans le tableau suivant de congruences (mod. 32).

1. $\begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$
 $Cl(-\Delta) \equiv 2(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)(1-\eta) + 2(1-\varepsilon_1 \varepsilon_2)(1-\mu)(1+\eta).$
2. $\begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & + \end{pmatrix}$
 $Cl(-\Delta) \equiv 2(1-\varepsilon_1 \mu) [(1+\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2 \eta) + (1-\varepsilon_1)(1-\eta_1 \eta_2)]$
 $+ 2(1-\varepsilon_2)(1-\mu)(1+\varepsilon_1 \eta_1 \eta_2).$

$$3. \quad \begin{pmatrix} + & , & + & , & + \\ + & , & + & , & - \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$Cl(-\Delta) = 2(1-\varepsilon_1\mu)[(1+\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1\eta) + (1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1\varepsilon_3)] \\ + 2(1-\varepsilon_1)(1-\mu)(1+\varepsilon_2\eta\eta_1\varepsilon_2).$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} + & , & + & , & - \\ + & , & + & , & - \end{pmatrix}$$

$$Cl(-\Delta) = 2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1-\eta) + 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)[(1-\mu)(1+\eta) + 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)].$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} + & , & + & , & - \\ + & , & - & , & + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-\Delta) = \begin{cases} 4(1-\mu)(1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) + 4(1+\varepsilon_1)(1-\eta) + 4(1+\mu)(1-\varepsilon_1), & \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ 8(1-\varepsilon_2\varepsilon_3) + 4(1-\mu)(1-\eta), & \text{avec } \left(\frac{qr}{p}\right) = \left(\frac{qr}{q_4}\right) = 1, \text{ si } \varepsilon_1 = -\varepsilon_2. \end{cases}$$

On remarquera que les résultats des cas 2 et 3 sont les mêmes, sauf interversion de ε_1 et ε_2 .

II.

Appliquée à des discriminants plus complexes, la formule fondamentale (18) donnerait des résultats pénibles à analyser. Si l'on arrivait, par des fonctions simples, à calculer la parité

de $\sum_1^{\Delta} s$, et celle de sommes analogues, la formule (15), com-

binée à des formules qu'on obtiendrait en considérant des sommations

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{\nu}\right) \left(1 \pm \left(\frac{D_1}{\nu}\right)\right) \left(1 \pm \left(\frac{D_2}{\nu}\right)\right) \dots \left(1 \pm \left(\frac{D_m}{\nu}\right)\right) \frac{\nu}{\Delta}.$$

du genre de (11), nous permettrait d'abréger considérablement

les opérations, et même de calculer les restes, dans certains cas, pour des modules plus grands. Malheureusement, cela ne semble guère possible.

On peut aboutir à des résultats équivalents à ceux du chapitre I, en partant d'une formule légèrement différente, que nous allons développer rapidement. Soit

$$S = \sum_{\nu=1}^{\frac{\Delta}{2}} \left(\frac{D}{\nu} \right) \left(1 + \left(\frac{D_1}{\nu} \right) \right) \left(1 + \left(\frac{D_2}{\nu} \right) \right) \dots \left(1 + \left(\frac{D_m}{\nu} \right) \right). \quad (29)$$

($D_1, D_2, \dots, D_m$ sont des discriminants fondamentaux impairs premiers entre eux; $D = D_1 D_2 \dots D_m$, $\Delta = |D|$.)

L'étude de S se ramène, comme plus haut, au calcul de

$$S_0 = \sum_{\nu=1}^{\frac{\Delta}{2}} \left(\frac{D^2}{\nu} \right)$$

et de termes de la forme

$$A = \sum_{\nu=1}^{\frac{\Delta' Q}{2}} \left(\frac{D' Q^2}{\nu} \right), \text{ où } D', Q \text{ sont impairs, } \Delta' = |D'|,$$

et $\Delta = \Delta' Q$.

On a immédiatement (4), $S_0 = \Phi \left(\Delta, \frac{\Delta}{2} \right) = \frac{1}{2} \Phi(\Delta)$. En appliquant à A la transformation (2), il vient

$$A = \sum_{d(Q)} \mu(d) \left(\frac{D'}{d} \right) \sum_{\nu=1}^{\frac{\Delta' Q'}{2}} \left(\frac{D'}{\nu} \right), \text{ où } Q' = \frac{Q}{d}.$$

Q' étant impair, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{\Delta' Q'}{2}} \left(\frac{D'}{\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{\frac{\Delta'}{2}} \left(\frac{D'}{\nu} \right),$$

donc

$$A = \sum_{d(Q)} \mu(d) \left(\frac{D'}{d}\right) \sum_{v=1}^{\frac{\Delta'}{2}} \left(\frac{D'}{v}\right), \quad (D' \text{ fondamental}).$$

La sommation en v du second membre est égale, d'après une formule connue, à $\frac{2}{\tau'} \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta'}\right)\right) Cl(D')$, si D' est négatif; elle est nulle, si D' est positif. Nous noterons

$$\overline{Cl(D)} = \frac{2}{\tau} \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) Cl(D), \quad \text{si } D < 0, \quad \Delta = |D|, \\ Cl(D) = 0, \quad \text{si } D > 0, \quad (30)$$

D étant un discriminant fondamental.

Il viendra donc, en remarquant que $\sum_{d(Q)} \mu(d) \left(\frac{D'}{d}\right)$ est égal à (D', Q) ,

$$A = (D', Q) \overline{Cl(D')}.$$

Nous connaissons maintenant tous les éléments du second membre de (29). Le premier membre S est exprimable comme suit :

$$S = 2^m \sum_1^{\frac{\Delta}{2}} 1,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs de s satisfaisant aux conditions

$$\left(\frac{D_1}{s}\right) = \left(\frac{D_2}{s}\right) = \dots = \left(\frac{D_m}{s}\right) = 1 \\ 0 < s < \frac{\Delta}{2}.$$

On s'en convainc facilement: un terme du second membre de

(29) est égal à 2^m lorsque ces conditions sont remplies, et il est nul dans les autres cas. Par suite,

$$2^m \sum_1^* 1 = \frac{1}{2} \Phi(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m) \quad (31)$$

$$+ \sum_{a=1}^m \sum_{r_1 \dots r_a} (D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) \overline{Cl}(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}).$$

Le premier membre est divisible par 2^m . Si $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ sont des nombres premiers, on établit aisément au moyen de (31) les congruences calculées plus haut, pour $Cl(-pq), \dots$, etc.

En particulier, si $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \equiv \dots \equiv \Delta_m \equiv 1 \pmod{4}$, on aura (30)

$$\sum_1^* 1 = \frac{\Phi(\Delta)}{2^{m+1}}. \quad (32)$$

Si $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ sont de plus des nombres premiers, cette formule montre que:

Le nombre des résidus d'un nombre D produit de m facteurs premiers différents de la forme $4n+1$, premiers avec D et inférieurs à $\frac{D}{2}$, est égal à $\frac{\Phi(D)}{2^{m+1}}$.

III.

Soit $D_1, D_2, \dots, D_m$ des discriminants fondamentaux impairs, premiers entre eux ; soit $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ leurs valeurs absolues. D_0 étant un discriminant fondamental dont la valeur absolue est $\Delta_0 = 8$, nous étudierons la somme

$$S = \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta} \left(\frac{D}{v}\right) \left(1 + \left(\frac{D_0}{v}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{D_1}{v}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{D_2}{v}\right)\right) \dots \left(1 + \left(\frac{D_m}{v}\right)\right) \quad (33)$$

où D et Δ sont définis par $D = D_0 D_1 D_2 \dots D_m$, $\Delta = |D|$.

Tout d'abord, un terme quelconque de cette somme est ou nul ou égal à 2^{m+1} . Il est égal à 2^{m+1} si l'on a

$$\left(\frac{D_0}{v}\right) = \left(\frac{D_1}{v}\right) = \dots = \left(\frac{D_m}{v}\right) = 1$$

et nul dans les autres cas. On écrira donc,

$$S = 2^{m+1} \sum_1^{\frac{1}{4}\Delta} * 1. \left(\begin{array}{c} \left(\frac{D_0}{s}\right) = \left(\frac{D_1}{s}\right) = \dots = \left(\frac{D_m}{s}\right) = 1 \\ 0 < s < \frac{\Delta}{4} \end{array} \right)$$

ce qui entraîne

$$S \equiv 0, \pmod{2^{m+1}}.$$

D'autre part, le calcul direct du second membre de (33) se ramène, en effectuant les produits des parenthèses à celui d'une expression

$$S_0 = \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta} \left(\frac{D^2}{v}\right), \quad (D \equiv 0, \pmod{8})$$

et de termes de la forme

$$A = \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta'Q} \left(\frac{D'Q^2}{v} \right), \quad (\Delta'Q = \Delta, \Delta' = |D'|)$$

S_0 représente le nombre des entiers premiers avec Δ et inférieurs à $\frac{1}{4}\Delta$. Comme Δ est divisible par 4, on aura (4)

$$S_0 = \frac{1}{4} \Phi(\Delta).$$

A se laisse transformer comme suit (2):

$$A = \sum_{d|Q} \mu(d) \left(\frac{D'}{d} \right) \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta'Q'} \left(\frac{D'}{v} \right), \quad Q' = \frac{Q}{d} \quad (a)$$

et d parcourt les diviseurs de Q . La sommation en v a une valeur différente, selon que D_0 est contenu dans D' ou dans Q : nous étudierons séparément les deux cas.

1. $Q \equiv 0, \pmod{8}$ —. Quand $\mu(d)$ est différent de zéro,

$\frac{Q}{4d}$ est un nombre entier n , et l'on a $\sum_{v=1}^{n\Delta'} \left(\frac{D'}{v} \right) = 0$, (n entier); il viendra simplement

$$A = 0, \text{ pour } Q \equiv 0, \pmod{8}.$$

2. $D' \equiv 0, \pmod{8}$ —. $\frac{1}{4}\Delta'Q'$ n'est plus un multiple

entier de Δ' , les sommes $\sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta'Q'} \left(\frac{D'}{v} \right)$ ne s'annulent pas, comme dans le cas précédent. Nous écrirons, k désignant le reste de la division de Q' par 4

$$\frac{1}{4}\Delta'Q' = \Delta' \frac{Q'-k}{4} + \frac{k}{4}\Delta';$$

substituons cette valeur de $\frac{1}{4} \Delta' Q'$ dans (a)

$$A = \sum_{d(Q)} \mu(d) \left(\frac{D'}{d} \right) \sum_{\nu=1}^{\frac{h}{4} \Delta'} \left(\frac{D'}{\nu} \right).$$

Supposons $D' > 0$. On aura

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{h}{4} \Delta'} \left(\frac{D'}{\nu} \right) = \left(\frac{-4}{k} \right) \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4} \Delta'} \left(\frac{D'}{\nu} \right)$$

ou encore, puisque $\left(\frac{-4}{k} \right) = \left(\frac{-4}{d} \right) \left(\frac{-4}{Q} \right)$

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{h}{4} \Delta'} \left(\frac{D'}{\nu} \right) = \left(\frac{-4}{d} \right) \left(\frac{-4}{Q} \right) \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4} \Delta'} \left(\frac{D'}{\nu} \right).$$

Une formule bien connue de Dirichlet (8) montre que la sommation du second membre est égale à $\frac{1}{2} Cl(-4D')$. Il vient ainsi

$$A = \frac{1}{2} Cl(-4D') \left(\frac{-4}{Q} \right) \sum_{d(Q)} \mu(d) \left(\frac{-4D'}{d} \right)$$

ou encore,

$$A = \left(\frac{-4}{Q} \right) (-4D', Q) \frac{1}{2} Cl(-4D'), \text{ pour } D' > 0. \quad (b)$$

Supposons $D' < 0$. Dans ce cas,

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{h}{4} \Delta'} \left(\frac{D'}{\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4} \Delta'} \left(\frac{D'}{\nu} \right)$$

en vertu de la relation

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{3}{4}\Delta'} \left(\frac{-\Delta'}{\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}\Delta'} \left(\frac{-\Delta'}{\nu}\right); \quad (\Delta' \equiv 3, \pmod{4})$$

$\left(\frac{2}{D'}\right), \left(\frac{4}{D'}\right)$ sont ici nuls, (9) donne

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}\Delta'} \left(\frac{D'}{\nu}\right) = \frac{2}{\tau'} Cl(D');$$

donc,

$$A = (D', Q) \frac{2}{\tau'} Cl(D'), \quad (D' < 0). \quad (c)$$

Remarquons encore que les résultats (b) et (c) obtenus sous l'hypothèse $D' \equiv 0$, pour le module 8, subsistent entièrement si l'on suppose seulement D' pair. Posons pour abrégér:

$$\text{pour } D > 0, ((D, Q)) = \left(\frac{-4}{Q}\right) (-4D, Q), \quad K(D) = \frac{1}{2} Cl(-4D) \quad (34)$$

$$\text{pour } D < 0, ((D, Q)) = (D, Q), \quad K(D) = \frac{2}{\tau} Cl(D)$$

Il viendra généralement

$$A = ((D', Q)) K(D'), \quad \text{pour } Q \text{ impair, } D' \text{ pair.}$$

Nous aurons ainsi,

$$2^{m+1} \sum_1^* 1 = \frac{1}{4} \Phi(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m) \quad (\Delta_0 = 8). \quad (35)$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^m \sum_{r_1 \dots r_\alpha} ((D_0 D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_\alpha}, \Delta_{r_{\alpha+1}} \dots \Delta_{r_m})) K(D_0 D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_\alpha}).$$

Bornons-nous maintenant au cas particulier, le seul intéressant, où $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ sont des nombres premiers différents.

1. En usant de la relation

$$\frac{Cl(-\Delta S^2)}{Cl(-\Delta)} = \frac{2}{\tau} S \prod_s \left(1 - \left(\frac{-\Delta}{s} \right) \frac{1}{s} \right), \quad (-\Delta \text{ discrim. fondam. négat.}) \quad (36)$$

où s parcourt les facteurs premiers différents de S , on verra que

$$K(D_0 D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}) = Cl(-8\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a}).$$

En effet, si $D_0 D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}$ est négatif, égal donc à $-8\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a}$, la seconde des relations (34) correspond à ce qui vient d'être écrit; si $D_0 D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}$ est positif, égal donc à $8\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a}$, la première des relations (34) donne

$$K(D_0 D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}) = \frac{1}{2} Cl(-32\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a}),$$

qui est égal (36) à $Cl(-8\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a})$.

$\frac{1}{4} \Phi(\Delta_0 \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m)$ étant égal à $\Phi(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m)$, (35) s'écrira

$$2^{m+1} \sum_1^* \frac{1}{4} \Delta \quad 1 - \Phi(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m) = \quad (37)$$

$$\sum_{a=0}^m \sum_{r_1 \dots r_a} ((D_0 D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m})) Cl(-8\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a}),$$

($D_0 = \pm 8$)

$$\sum_1^* \frac{1}{4} \Delta \quad 1 \text{ est ici égal au nombre des résidus de } \Delta, \text{ premiers avec}$$

lui et inférieurs à $\frac{\Delta}{4}$.

2. (37) donne pour $m=1$, le premier membre étant divisible par 2,

$$Cl(-8\Delta_1) + ((D_0, \Delta_1)) Cl(-8) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2).$$

$Cl(-8)$ est égal à 1, $((D_0, \Delta_1))$ est égal à 0, ± 2 ; la congruence se réduit donc à

$$Cl(-8\Delta_1) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2).$$

Pour $m=2$, on trouverait de même

$$Cl(-8\Delta_1\Delta_2) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 4).$$

On a généralement, $((D_0, D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m})) \equiv 0$, (mod. 2^{m-a}); par suite, on démontre facilement par récurrence que

$$Cl(-8\Delta_1\Delta_2 \dots \Delta_m) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2^m) \quad (38)$$

résultat partiel de la théorie des genres, que l'on peut énoncer:

Le nombre des classes d'un discriminant fondamental négatif $-8P$ est divisible par 2^m , m étant le nombre des facteurs premiers différents de P .

3. On a encore

$$((D_0, D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m})) = \pm (-8\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}).$$

Ces deux symboles sont donc congrus pour le module 2^{m-a+1} . De (37) résulte alors la congruence, pour le module 2^{m+1}

$$Cl(-8\Delta_1\Delta_2 \dots \Delta_m) \equiv \Phi(\Delta_1\Delta_2 \dots \Delta_m) + \sum_{a=0}^{m-1} \sum_{r_1 \dots r_a} (-8\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) Cl(-8\Delta_{r_1} \Delta_{r_2} \dots \Delta_{r_a}) \quad (39)$$

On tire successivement de (39), en y faisant $m=0, 1, 2, \dots$

$$Cl(-8) \equiv \frac{1}{4} \Phi(8) = 1 \pmod{2}$$

$$Cl(-8\Delta_1) \equiv \Phi(\Delta_1) + (-8, \Delta_1) \pmod{4}$$

$$Cl(-8\Delta_1\Delta_2) \equiv \Phi(\Delta_1\Delta_2) + (-8\Delta_1, \Delta_2) \Phi(\Delta_1) + (-8\Delta_2, \Delta_1) \Phi(\Delta_2) \pmod{8} \\ + [(-8\Delta_1, \Delta_2)(-8, \Delta_1) + (-8\Delta_2, \Delta_1)(-8, \Delta_2) + (-8, \Delta_1\Delta_2)]$$

En adoptant l'écriture ⁽¹⁾ (19), le second membre s'écrit encore

$$\Phi(\Delta_1\Delta_2) + \sum_{\alpha, \beta} (-8\Delta_\alpha | \Delta_\beta) \Phi(\Delta_\alpha) + (-8 | \Delta_1\Delta_2), \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

La loi générale, analogue à celle que nous avons trouvée pour $P(D_1D_2\dots D_m)$ se démontre de la même manière. On obtient:

$$Cl(-8\Delta_1\Delta_2\dots\Delta_m) \equiv \sum_{a=0}^m \sum_{r_1\dots r_a} (-8\Delta_{r_1}\Delta_{r_2}\dots\Delta_{r_a} | \Delta_{r_{a+1}}, \dots, \Delta_{r_m}) \Phi(\Delta_{r_1}\Delta_{r_2}\dots\Delta_{r_a}) \pmod{2^{m+1}} \quad (40)$$

où l'on convient, pour $a=0$, $\Phi(0)=1$.

Si un ou plusieurs Δ_μ sont de la forme $4n+1$, les facteurs $\Phi(\)$ qui les contiennent sont divisibles par 2^{a+1} et les termes correspondants

$$(-8\Delta_{r_1}\Delta_{r_2}\dots\Delta_{r_a} | \Delta_{r_{a+1}}, \dots, \Delta_{r_m}) \Phi(\Delta_{r_1}\Delta_{r_2}\dots\Delta_{r_a})$$

(1) $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ étant des nombres premiers impairs positifs, le symbole $(-8\Delta_1\Delta_2\dots\Delta_a | \Delta_{a+1}, \dots, \Delta_m)$ est défini par

$$(-8\Delta_1\Delta_2\dots\Delta_a | \Delta_{a+1}, \dots, \Delta_m) = \sum_{\mu=0}^{m-a-1} \sum_{\rho} (-8\Delta_1\Delta_2\dots\Delta_a\Delta_{\rho_{a+1}}\dots\Delta_{\rho_{a+\mu}} | \Delta_{\rho_{a+\mu+1}}\dots\Delta_{\rho_m}) \\ (-8\Delta_1\Delta_2\dots\Delta_a | \Delta_{\rho_{a+1}}, \dots, \Delta_{\rho_{a+\mu}})$$

la sommation (ρ) s'étendant à toutes les combinaisons μ à μ , $\Delta_{\rho_{a+1}}\dots\Delta_{\rho_{a+\mu}}$ prises parmi les $m-a$ objets $\Delta_{a+1}, \Delta_{a+2}, \dots, \Delta_m$.

sont divisibles par 2^{m+1} et peuvent être négligés dans le calcul de (40). Notons deux cas particuliers intéressants, relatifs à cette dernière remarque. On a

$$Cl(-8pq_1q_2\dots q_m) \equiv (-8p \mid q_1, q_2, \dots, q_m) \Phi(p) + (-8 \mid p, q_1, q_2, \dots, q_m),$$

pour le module 2^{m+2} . $\Phi(p)$ étant impairement pair, on a encore

$$Cl(-8pq_1q_2\dots q_m) \equiv 2(-8p \mid q_1, q_2, \dots, q_m) + (-8 \mid p, q_1, q_2, \dots, q_m),$$

(mod. 2^{m+2}). (41)

De même,

$$Cl(-8q_1q_2\dots q_m) \equiv (-8 \mid q_1, q_2, \dots, q_m), \text{ (mod. } 2^{m+1}). \quad (42)$$

(Rappelons que p et q désignent des nombres premiers respectivement de la forme $4n+3$ et $4n+1$).

4. L'emploi des méthodes exposées a permis à M. Lerch (1) d'établir les congruences suivantes, pour le module 8.

$$m=2. \quad Cl(-8p_1p_2) \equiv -1 + \left(\frac{2p_1}{p_2}\right) + \left(\frac{2p_2}{p_1}\right) + \left(\frac{2}{p_1p_2}\right)$$

$$(43) \quad Cl(-8pq) \equiv \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{2}{q}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{2p}{q}\right)\right).$$

$$Cl(-8q_1q_2) \equiv \left(1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{2}{q_1q_2}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{2}{q_1}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{2}{q_2}\right)\right).$$

Ces résultats concordent avec ceux donnés par Hurwitz (voir le 2^{me} tableau p. 10). Je noterai encore que

$$Cl(-8\Delta) \equiv 1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right), \text{ (mod. 4)} \quad (43 \text{ bis})$$

pour Δ nombre premier impair.

Nous allons appliquer notre analyse au cas $m=3$. Il se présentera quatre cas distincts caractérisés par les types de discriminants

$$-8p_1p_2p_3, \quad -8p_1p_2q, \quad -8pq_1q_2, \quad -8q_1q_2q_3.$$

(1) M. LERCH. — Sav. Etrang. p. 200-206.

I. $m = 3$, $\Delta_1 = p_1$, $\Delta_2 = p_2$, $\Delta_3 = p_3$.

La formule (39) donne, pour le module 16:

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv \sum_{\alpha} (-8p_{\beta} p_{\gamma}, p_{\alpha}) Cl(-8p_{\beta} p_{\gamma}) \\ + \sum_{\alpha} (-8p_{\alpha}, p_{\beta} p_{\gamma}) Cl(-8p_{\alpha}) + (-8, p_1 p_2 p_3) + \Phi(p_1 p_2 p_3) \quad (a)$$

Notons $\left(\frac{2}{p_{\alpha}}\right) = \varepsilon_{\alpha}$; $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \eta_1$, $\left(\frac{p_2}{p_3}\right) = \eta_2$, $\left(\frac{p_3}{p_1}\right) = \eta_3$.

Substituant dans (a) les restes (43) de $Cl(-8p_{\beta} p_{\gamma})$, ..., etc., on aura, en usant des notations indiquées:

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv \sum_{\alpha} 1 - \varepsilon_{\alpha} \eta_1 \eta_2 \eta_3 \left[(\varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\beta}) \left(\frac{p_{\beta}}{p_{\gamma}} \right) + \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\gamma} - 1 \right] \\ + \sum_{\alpha} \left(1 + \varepsilon_{\beta} \left(\frac{p_{\alpha}}{p_{\gamma}} \right) \right) \left(1 + \varepsilon_{\gamma} \left(\frac{p_{\alpha}}{p_{\beta}} \right) \right) (1 - \varepsilon_{\alpha}) \\ + (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) + 8 \quad (z, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$$

La discussion portera sur les quatre cas suivants:

1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. Le [] de la première sommation annule cette sommation; la présence des facteurs $1 - \varepsilon_{\gamma}$ annule la seconde; il reste ainsi, puisque $(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = 8$, et, que 16 est congru à zéro

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv 0 \quad (1).$$

2. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. Les facteurs $(\varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\beta}) \left(\frac{p_{\beta}}{p_{\gamma}} \right) + \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\gamma} - 1$ sont encore nuls: la première sommation disparaît. La seconde se réduit à $2 \sum_{\alpha} \left(1 - \left(\frac{p_{\alpha}}{p_{\beta}} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{p_{\alpha}}{p_{\gamma}} \right) \right)$; il vient, l'avant dernier terme étant nul,

(1) Nous n'indiquons pas le module de la congruence. Pour toutes celles qui suivront dans le présent chapitre, ce sera 16, à moins de mention contraire expresse.

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv 2 \sum_{\alpha} \left(1 - \left(\frac{p_{\alpha}}{p_{\beta}}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{p_{\alpha}}{p_{\gamma}}\right)\right) + 8, \quad (z, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$$

Cette expression se simplifie comme suit. Notons

$$\sigma = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3;$$

si $|\sigma| = 1$, deux seulement des symboles η sont de même signe; il viendra, la sommation en α étant congrue à 4 pour le module 8

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv 0.$$

Si $|\sigma| = 3$, les trois symboles η sont de même signe; chacun des termes $\left(1 - \left(\frac{p_{\alpha}}{p_{\beta}}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{p_{\alpha}}{p_{\gamma}}\right)\right)$ est nul, un de ses facteurs étant nul. Il reste

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv 8.$$

Remarquons que $\left(\frac{-4}{\sigma}\right) = 1$ si $|\sigma| = 1$, $\left(\frac{-4}{\sigma}\right) = -1$, si $|\sigma| = 3$; nous pourrions réunir les congruences précédentes dans une seule

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv 4 \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right).$$

3. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1$. Un seul des termes de la première somme s'annule: celui pour lequel $\alpha = 3$. La seconde somme a deux termes nuls ($\alpha = 1, 2$), à cause du facteur $1 - \varepsilon_{\alpha}$. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} Cl(-8p_1p_2p_3) &\equiv 2 \sum_{\alpha} (1 - \eta_{\beta} \eta_{\gamma}) \left(1 + \left(\frac{p_{\beta}}{p_{\gamma}}\right)\right) \\ &+ 2 \left(1 + \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right) + 8 \quad (z, \gamma = 1, 2) \end{aligned}$$

expression que l'on ramène encore à $4\left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right)$.

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv 4\left(1 - \left(\frac{-4}{\tau}\right)\right).$$

4. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -1$. Il ne reste de la première somme que $2 \sum_{\alpha, \beta} (1 + \varepsilon_\beta \varepsilon_3) \left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_3}\right)\right)$, de la seconde

$$\sum_{\alpha, \beta} \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{p_\alpha}{p_3}\right)\right), \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} Cl(-8p_1p_2p_3) &\equiv 2 \sum_{\alpha, \beta} (1 + \varepsilon_\beta \varepsilon_3) \left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_3}\right)\right) \\ &+ 2 \sum_{\alpha, \beta} \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{p_\alpha}{p_3}\right)\right) + 8. \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \end{aligned}$$

Le second membre développé

$$\begin{aligned} 8 + 2 [(1 + \varepsilon_2 \varepsilon_3)(1 - \varepsilon_1) + (1 + \varepsilon_1 \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_2) \\ + (1 - \varepsilon_3)(1 - \varepsilon_2) + (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_3)] \end{aligned}$$

se réduit à être congru à $8 + 4(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)$, c'est-à-dire à $4(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)$

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv 4(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

Nous pouvons maintenant réunir ces résultats dans le tableau suivant :

$$Cl(-8p_1p_2p_3) \equiv \begin{cases} 4\left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right), & \text{si } \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1 \\ 4(1 + \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta), & \text{si } \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1, \varepsilon_\gamma = 1 \\ 0, & \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1 \end{cases} \quad (44)$$

(mod. 16)

$$\left(\begin{array}{l} p_1, p_2, p_3 \text{ nombres premiers différents, de la forme } 4n+3. \\ \left(\frac{2}{p_x}\right) = \varepsilon_x \ (x=1,2,3); \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \eta_3, \left(\frac{p_2}{p_3}\right) = \eta_1, \left(\frac{p_3}{p_1}\right) = \eta_2, \sigma = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3. \end{array} \right)$$

$$\text{II. } m=3, \quad \Delta_1=p_1, \Delta_2=p_2, \Delta_3=q.$$

(39) donne ici, pour le module 16.

$$\begin{aligned} Cl(-8p_1p_2q) &\equiv (-8p_1p_2q) Cl(-8p_1p_2) + \sum_{\alpha, \beta} (-8p_\alpha q, p_\beta) Cl(-8p_\alpha q) \\ &+ \sum_{\alpha, \beta} (-8p_\alpha, p_\beta q) Cl(-8p_\alpha) + (-8q, p_1p_2) Cl(-8q) + (-8, p_1p_2q), \\ &\hspace{15em} (\alpha, \beta = 1, 2). \end{aligned}$$

Nous emploierons les abréviations

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_1}{q}\right) &= \eta_1, \quad \left(\frac{p_2}{q}\right) = \eta_2, \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \mu, \\ \left(\frac{2}{p_1}\right) &= \varepsilon_1, \quad \left(\frac{2}{p_2}\right) = \varepsilon_2, \quad \left(\frac{2}{q}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Il viendra (43),

$$\begin{aligned} Cl(-8p_1p_2q) &\equiv (1 - \varepsilon \eta_1 \eta_2) [(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \mu + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1] \\ &+ \sum \left(1 + \varepsilon_\beta \eta_\beta \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta} \right) \right) [(1 - \eta_\alpha) (1 - \varepsilon) + (1 - \varepsilon_\alpha) (1 - \varepsilon \eta_\alpha)] \\ &+ \sum \left(1 + \varepsilon_\beta \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta} \right) \right) (1 - \varepsilon \eta_\alpha) (1 - \varepsilon_\alpha) + (1 + \varepsilon_1 \eta_1) (1 + \varepsilon_2 \eta_2) (1 - \varepsilon) \\ &+ (1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2) (1 - \varepsilon), \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \end{aligned}$$

Examinons les six cas qui se présentent:

1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 1$. Les termes contiennent tous un ou plusieurs facteurs $(1 - \varepsilon)$, $(1 - \varepsilon_\alpha)$; ils s'annulent donc identiquement et

$$Cl(-8p_1p_2q) \equiv 0.$$

2. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = -1$. Seules, la première et la dernière expression s'annulent identiquement. Le [] de la première sommation est égal à 4; on a

$$\begin{aligned} Cl(-8p_1p_2q) &\equiv \sum_{\alpha, \beta} \left(1 - \varepsilon_\beta \left(\frac{p}{p_\beta} \right) \right) \\ &+ 2 \sum_{\alpha, \beta} \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta} \right) \right) (1 + \varepsilon_\alpha) + 2(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Le second membre développé est égal à

$$4(1 - \varepsilon_2) + 4(1 + \varepsilon_1) + 2(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon_1) + 2(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_2) + 2(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)$$

Groupons les deux premiers termes, on a

$$4(1 - \varepsilon_2) + 4(1 + \varepsilon_1) \equiv 4(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2), \quad (\text{mod. } 16).$$

Séparons les deux cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$:

$$\text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \text{ on a } Cl(-8p_1p_2q) \equiv 0$$

$$\text{si } \varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \quad Cl(-8p_1p_2q) \equiv 4(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2).$$

En écrivant

$$Cl(-8p_1p_2q) \equiv 2(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2).$$

on vérifie les deux hypothèses.

3. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 1$. Les calculs se présentent de la même manière que dans le cas précédent. On a d'abord

$$Cl'(-8p_1p_2q) \equiv 2(1 - \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) + 2(1 - \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1) + 2(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) + 8.$$

L'analyse séparée des hypothèses $\eta_1 = \eta_2, \eta_1 = -\eta_2$, le réduit à $2(1 - \eta_1 \eta_2)(1 + \mu \eta_1)$.

$$Cl(-8p_1 p_2 q) \equiv 2(1 - \eta_1 \eta_2)(1 + \mu \eta_1).$$

4. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon = -1$. Le premier terme de (a) est nul. Le second se réduit à $2 \sum_{\alpha, \beta} (1 - \eta_\alpha) \left(1 - \eta_\beta \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right)$, le troisième à $2 \sum_{\alpha, \beta} \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) (1 - \eta_\alpha)$. Les deux derniers sont nuls. Donc,

$$Cl(-8p_1 p_2 q) = 2 \sum_{\alpha, \beta} (1 - \eta_\alpha) \left(1 - \eta_\beta \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) + 2 \sum_{\alpha, \beta} \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) (1 - \eta_\alpha).$$

Retranchant la seconde somme de la première, on trouvera

$$Cl(-8p_1 p_2 q) \equiv 0.$$

5. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon = 1$. Les deux derniers termes de (a) sont nuls. On a, en développant,

$$\begin{aligned} Cl(-8p_1 p_2 q) &\equiv 2(1 - \eta_1 \eta_2)(1 + \mu) + 2(1 - \eta_2)(1 + \mu \eta_1) + 2(1 - \eta_2)(1 - \mu) \\ &\equiv 2(1 - \eta_1 \eta_2)(1 + \mu) + 2(1 - \eta_1)(1 - \eta_2). \end{aligned}$$

6. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon = -1$. On obtiendrait d'abord,

$$\begin{aligned} Cl(-8p_1 p_2 q) &= 2(1 - \mu)(1 + \eta_1 \eta_2) + 4(1 + \mu \eta_2) + 2(1 - \eta_2)(1 + \mu \eta_1) \\ &\quad + 2(1 + \eta_1)(1 + \mu) + 2(1 - \eta_1)(1 + \eta_2). \end{aligned}$$

Cette expression se réduit à $4(1 - \mu)$ par groupement des termes.

$$Cl(-p_1 p_2 q) \equiv 4(1 - \mu).$$

Le tableau suivant résume la discussion.

$$Cl(-8p_1 p_2 q) \equiv \begin{cases} 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 + \mu \varepsilon_1) + (1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \eta_1 \eta_2)(1 + \mu \varepsilon_1 \eta_1), & \text{si } \varepsilon = -1 \\ 2(1 + \mu \varepsilon_1)(1 - \eta_1 \eta_2) + 2(1 - \eta_1)(1 - \eta_2), & \text{si } \varepsilon = +1, \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \\ 0, & \text{si } \varepsilon = +1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{cases} \pmod{16} \quad (45)$$

$$\left(\begin{array}{l} p_1, p_2, q \text{ nombres premiers différents, les deux pre-} \\ \text{miers de la forme } 4n+3, \text{ le dernier de la forme } 4n+1 \\ \left(\frac{p_\alpha}{q} \right) = \eta_\alpha, \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = \mu; \left(\frac{2}{p_\alpha} \right) = \varepsilon_\alpha, \left(\frac{2}{p} \right) = \varepsilon. \quad (\alpha=1, 2). \end{array} \right)$$

III. $m=3$. $\Delta_1 = p$, $\Delta_2 = q_1$, $\Delta_3 = q_2$
La formule (41) devient

$$Cl(-8pq_1q_2) \equiv 2(-8p \mid q_1, q_2) + (-8 \mid p, q_1, q_2), \pmod{16}.$$

Dans le développement de ces symboles, nous userons des notations

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{p} \right) &= \varepsilon, \quad \left(\frac{2}{q_1} \right) = \varepsilon_1, \quad \left(\frac{2}{q_2} \right) = \varepsilon_2, \\ \left(\frac{p}{q_1} \right) &= \eta_1, \quad \left(\frac{p}{q_2} \right) = \eta_2, \quad \left(\frac{q_1}{q_2} \right) = \mu, \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

On obtiendra

$$\begin{aligned} Cl(-8pq_1q_2) &\equiv \\ \sum_{\alpha, \beta} (1 - \mu \varepsilon_\alpha \eta_\alpha) [(1 - \varepsilon_\beta) (1 - \eta_\beta) + (1 - \varepsilon) (1 - \varepsilon_\beta \eta_\beta)] &\quad (a) \\ + \sum_{\alpha, \beta} (1 - \varepsilon_\alpha) (1 + \varepsilon \eta_\alpha) (1 - \mu \varepsilon_\beta) + (1 + \varepsilon \eta_1 \eta_2) [(1 - \mu) (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) + (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2)] \\ + (1 - \varepsilon) (1 - \varepsilon_1 \eta_1) (1 - \varepsilon_2 \eta_2) + (1 + \varepsilon) (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2), &\quad (\alpha, \beta=1, 2). \end{aligned}$$

Six cas se présentent:

1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 1$. La présence des facteurs nuls $1 - \varepsilon_\alpha$, $1 - \varepsilon$, $1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2$ annule tous les termes du second membre de (a). Ainsi,

$$Cl(-8pq_1q_2) \equiv 0.$$

2. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = -1$. Le dernier terme de (a) seul s'annule identiquement. Les autres donnent

$$\begin{aligned} Cl(-8pq_1q_2) &\equiv \\ 4 \sum_{\alpha, \beta} (1 + \mu \varepsilon_\alpha) + 2 \sum_{\alpha, \beta} (1 + \mu) (1 - \eta_\alpha) + 4(1 - \eta_1 \eta_2) + 2(1 + \eta_1) (1 + \eta_2) \end{aligned}$$

La première sommation est congrue selon le module 4 à $1-\eta_1\eta_2$, la seconde selon le module 8 à $(1+\mu)(1-\eta_1\eta_2)$. Il vient donc puisque $4(1-\eta_1\eta_2)$ se trouvant répété deux fois, disparaît comme congru à zéro pour le module 16,

$$Cl(-8pq_1q_2) \equiv 2(1+\mu)(1-\eta_1\eta_2) + 2(1+\eta_1)(1+\eta_2).$$

3. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon = 1$. Les deuxième, troisième et dernier termes de (a) s'annulent. Il reste

$$Cl(-8pq_1q_2) = 2 \sum_{\alpha, \beta} (1-\eta_\beta) (1-\mu\eta_\alpha) + 2(1-\eta_1)(1-\eta_2).$$

Sous l'hypothèse $\eta_1 = \eta_2$, on obtient $Cl(-8pq_1q_2)$ congru à $4(1-\eta_1)$; sous l'hypothèse $\eta_1 = -\eta_2$, $Cl(-8pq_1q_2)$ est congru à $4(1-\mu)$. On satisfait aux deux cas par

$$Cl(-8pq_1q_2) \equiv 2(1+\eta_1\eta_2)(1-\eta_1) + 2(1-\eta_1\eta_2)(1-\mu).$$

$2(1+\eta_1\eta_2)(1-\eta_1)$ étant égal à $2(1-\eta_1)(1-\eta_2)$, nous écrirons encore

$$Cl(-8pq_1q_2) \equiv 2(1-\eta_1\eta_2)(1-\mu) + 2(1-\eta_1)(1-\eta_2).$$

4. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon = -1$. La première sommation de (a) se réduit à $2 \sum_{\alpha, \beta} (1+\mu\eta_\alpha)(1-\eta_\beta)$, la seconde à $2 \sum_{\alpha, \beta} (1+\mu)(1-\eta_\alpha)$. Leur différence est congrue à $2 \sum_{\alpha, \beta} (1-\eta_\alpha)(1-\eta_\beta)$, c'est-à-dire à zéro.

Il reste

$$Cl(-8pq_1q_2) \equiv 4(1-\eta_1\eta_2).$$

5. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon = 1$. Le terme ($\beta=1$) de la première somme est nul, ainsi que le terme correspondant de la seconde. Un groupement convenable des autres termes donne d'abord pour le second membre de (a)

$$2(1-\mu)(1-\eta_1) + 2(1-\eta_2)(1-\mu\eta_1).$$

L'analyse séparée des hypothèses $\eta_1 = \eta_2$, $\eta_1 = -\eta_2$, le ramène à $2(1-\eta_1\eta_2)(1-\mu) + 2(1-\eta_1)(1-\eta_2)$. Par suite,

$$Cl(-8pq_1q_2) \equiv 2(1-\eta_1\eta_2)(1-\mu) + 2(1-\eta_1)(1-\eta_2).$$

6. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon = -1$. Seul le dernier terme de (a) s'annule identiquement. On trouverait, toutes réductions faites

$$Cl(-8pq_1q_2) \equiv 4(1-\mu\eta_2).$$

Nous condons cette discussion dans le tableau

$$Cl(-8pq_1q_2) \equiv \begin{cases} 2\left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\eta_1\right)\left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\eta_2\right) + 2\left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\mu\right)(1 - \eta_1\eta_2), & \text{si } \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon = -1, \\ 4(1 - \eta_1\eta_2), & \text{si } \varepsilon = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \\ 4(1 - \mu\eta_2), & \text{si } \varepsilon = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1 \\ 0, & \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 1. \end{cases} \quad (46)$$

(mod. 16)

$$\left(\begin{array}{l} p, q_1, q_2, \text{ sont des nombres premiers différents} \\ -p \equiv q_1 \equiv q_2 \equiv 1, \quad (\text{mod. } 4) \\ \left(\frac{2}{p}\right) = \varepsilon, \left(\frac{2}{q_2}\right) = \varepsilon_\alpha; \left(\frac{p}{q_\alpha}\right) = \eta_\alpha; \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = \mu; \sigma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon \quad (\alpha=1,2) \end{array} \right)$$

IV. $m=3$, $\Delta_1=q_1$, $\Delta_2=q_2$, $\Delta_3=q_3$.

On a, (42), pour le module 16

$$Cl(-8q_1q_2q_3) \equiv (-8 \mid q_1, q_2, q_3).$$

Cette formule développée s'écrit, après quelques simplifications

$$Cl(-8q_1q_2q_3) \equiv \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (1 - \varepsilon_\alpha \eta_\beta \eta_\gamma) [(1 - \eta_\alpha)(1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma) + (1 - \varepsilon_\beta)(1 - \varepsilon_\gamma)] \\ + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (1 - \varepsilon_\beta \eta_\gamma)(1 - \varepsilon_\gamma \eta_\beta)(1 - \varepsilon_\alpha) + (1 - \varepsilon_\alpha)(1 - \varepsilon_\beta)(1 - \varepsilon_\gamma).$$

Les ε, η ont ici les significations

$$\left(\frac{2}{q_\alpha}\right) = \varepsilon_\alpha, \left(\frac{q_\alpha}{q_\beta}\right) = \eta_\gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$$

Je noterai encore : $\sigma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\eta = \text{sgn}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$.

La discussion comporte quatre cas:

1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. Tous les termes du second membre de (a) sont nuls. Donc

$$Cl(-8q_1q_2q_3) \equiv 0.$$

2. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. Le premier [] se réduit à 4, la seconde sommation à $2 \sum_{\alpha} (1 + \eta_s)(1 + \eta_r)$. Par suite, il reste au second membre

$$8 + 4 \sum_{\alpha} (1 + \eta_s \eta_r) + 2 \sum_{\alpha} (1 + \eta_s)(1 + \eta_r).$$

Si η_1, η_2, η_3 ont même signe, le deuxième terme est congru à 8, le troisième est nul ou égal à un multiple impair de 8, suivant que les η sont négatifs ou positifs. Ainsi, le second membre est lui-même congru à zéro si les η sont négatifs, et congru à 8 si les η sont positifs.

Si les η ont des signes différents — supposons, pour fixer les idées η_1 et η_2 de même signe — le deuxième terme se réduit à 8, le troisième est nul ou égal à 8, selon que le signe de η_1, η_2 est négatif ou positif. Ici encore, le second membre est congru à zéro si le signe de η_1 est négatif, et congru à 8, si ce signe est positif. η étant le signe de la somme $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$, la formule

$$Cl(-8q_1q_2q_3) \equiv 4(1 + \eta).$$

résume les différentes hypothèses.

3. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1$. Le second membre de (a) se réduit à

$$2 \sum_{\alpha=1,2} (1 - \eta_{\alpha})(1 - \eta_s \eta_r) + 2(1 - \eta_1)(1 - \eta_2).$$

Une analyse semblable à celle qu'on vient de faire montre que

$$Cl(-8q_1q_2q_3) \equiv 4(1 - \eta).$$

4. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. La première somme

$$2 \sum_{\alpha=1,2} (1 - \eta_\alpha) (1 + \eta_\beta \eta_\gamma) + 4(1 - \eta_1 \eta_2)$$

retranchée de la seconde $2 \sum_{\alpha=1,2} (1 - \eta_\beta) (1 + \eta_\gamma)$, entraîne, le dernier terme de (a) étant nul,

$$Cl(-8q_1 q_2 q_3) = 4(1 - \eta_1 \eta_2).$$

Le tableau ci-dessous résume la discussion

$$Cl(-8q_1 q_2 q_3) \pmod{16} = \begin{cases} 4 \left(1 - \left(\frac{-4}{\tau} \right) \eta \right), & \text{si } \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1, \\ 4(1 - \eta_\alpha \eta_\beta), & \text{si } \varepsilon_\gamma = 1, \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1, \\ 0, & \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1. \end{cases} \quad (47)$$

$$\left(\begin{array}{l} q_1, q_2, q_3 \text{ nombres premiers différents de la forme } 4n+1. \\ \left(\frac{2}{q_\alpha} \right) = \varepsilon_\alpha, \left(\frac{q_\alpha}{q_\beta} \right) = \eta_\gamma; \tau = \sum \varepsilon_\alpha, \eta = \text{sgn } \sum \eta_\alpha. \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \end{array} \right)$$

Nous avons maintenant épuisé la recherche des congruences (mod. 16) relatives à $Cl(-8\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)$.

Un coup d'œil sur les résultats obtenus, montre que l'on a toujours

$$Cl(-8\Delta_1) \equiv 0, \pmod{4}; \quad Cl(-8\Delta_1 \Delta_2) \equiv 0, \pmod{8}; \\ Cl(-8\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3) \equiv 0, \pmod{16}$$

si les conditions $\left(\frac{2}{\Delta_1} \right) = \left(\frac{2}{\Delta_2} \right) = \left(\frac{2}{\Delta_3} \right) = 1$ sont remplies, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ étant des nombres premiers impairs. La relation (39) montre que ce fait peut être aisément généralisé.

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ étant des nombres premiers tels que

$$\left(\frac{2}{\Delta_1} \right) = \left(\frac{2}{\Delta_2} \right) = \dots = \left(\frac{2}{\Delta_m} \right) = 1, \text{ on a} \\ Cl(-8\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m) \equiv 0, \pmod{2^{m+1}}. \quad (48)$$

Bornons-nous à en donner la démonstration pour $m=4$. La relation (48) étant vraie pour $m=1, 2, 3$, il vient (39)

$$Cl(-8\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4) \equiv \Phi(\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4) + (-8, \Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4), \pmod{32}.$$

Si un ou plusieurs des Δ sont de la forme $8n+1$, $\Phi(\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)$ est divisible par 32 et $(-8, \Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)$ est nul. (48) est donc vérifié immédiatement.

Si aucun des Δ n'est de la forme $8n+1$, $\Phi(\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)$ a pour reste 16 suivant le module 32. De même $(-8, \Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)$ a ici pour valeur 16. Leur somme est congrue à zéro pour le module 32, ce qui vérifie (48). L'extension de cette démonstration à m quelconque est immédiate.

IV.

On peut arriver par une autre voie aux résultats précédents. Δ étant un nombre impair, produit de m facteurs premiers différents $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$, une formule connue de Dirichlet donne

$$\frac{1}{2} Cl(-8\Delta) = \sum_{\nu=1}^{\frac{3}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta} \right) + \left(\frac{-4}{\Delta} \right) \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta} \right). \quad (49)$$

Nous sommes amenés à étudier des expressions du type

$$S = \sum_{\nu=1}^{\frac{3}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta} \right) \prod_{\mu=1}^m \left(1 + \left(\frac{\nu}{\Delta_\mu} \right) \right) + \left(\frac{-4}{\Delta} \right) \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta} \right) \prod_{\mu=1}^m \left(1 + \left(\frac{\nu}{\Delta_\mu} \right) \right) \\ (\Delta = \Delta_1\Delta_2\Delta_3 \dots \Delta_m)$$

S est divisible par 2^m ; le second membre développé contient un terme $\frac{1}{2} Cl(-8\Delta)$ et des termes congrus suivant certaines puissances de 2 à $Cl(-8\Delta_1)$, $Cl(-8\Delta_1\Delta_2)$, etc. On obtiendrait

ainsi des congruences (mod. 2^{m+1}) entre $Cl(-8\Delta_1\Delta_2\ldots\Delta_m)$ et les classes $Cl(-8\Delta_{r_1}\Delta_{r_2}\ldots\Delta_{r_a})$, ($a=0,1,\ldots,m-1$). Mais les coefficients qui affectent ces nombres de classes sont trop complexes pour être établis dans le cas général, et l'on est obligé d'étudier successivement S pour $m=1,2,3,\ldots$ M. Lerch ⁽¹⁾ a étudié, en partant de ce point de vue, le cas $m=2$. Nous allons pousser l'analyse au cas $m=3$. Ce sera en même temps une vérification utile des formules (44-47). Voici les résultats de M. Lerch pour $m=2$.

Si l'on pose $p \equiv \rho, q \equiv \tau, \pmod{8}$, $0 \leq \frac{\rho}{\tau} < 8$

$$\frac{1}{2} Cl(-8pq) \equiv \mathfrak{J}_{\rho,\sigma} \pmod{4}, \quad 0 \leq \mathfrak{J}_{\rho,\sigma} < 4,$$

on a le tableau suivant des $\mathfrak{J}$ ⁽²⁾

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{1,1}=0, \quad \mathfrak{J}_{1,3}=1-\left(\frac{p}{q}\right), \quad \mathfrak{J}_{1,5}=1-\left(\frac{p}{q}\right), \quad \mathfrak{J}_{1,7}=0, \\ \mathfrak{J}_{3,3}=0, \quad \mathfrak{J}_{3,5}=2, \quad \mathfrak{J}_{3,7}=1-\left(\frac{p}{q}\right) \quad (50) \\ \mathfrak{J}_{5,5}=2, \quad \mathfrak{J}_{5,7}=1-\left(\frac{p}{q}\right) \\ \mathfrak{J}_{7,7}=0. \end{aligned}$$

M. Lerch note encore les formules, relatives au module 8,

$$Cl(-8pq) = \begin{cases} 2\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right), & \text{si } p \equiv q+4, \left(\frac{2}{p}\right)=1. \\ \left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{-4}{p}\right)\right), & \text{si } p \equiv q. \end{cases}$$

(1) M. LERCH. — Acta math. t. 30, p. 275-279.

(2) Ce tableau est identique au second tableau d'Hurwitz (voir p. 10).
Notons ici que pour obtenir ses résultats, M. Hurwitz part uniquement de la formule (49).

Nous étudierons la somme suivante

$$S = \sum_{\nu=1}^{\frac{3}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta}\right) \left(1 + \left(\frac{\nu}{\Delta_1}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{\nu}{\Delta_2}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{\nu}{\Delta_3}\right)\right) \\ + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta}\right) \left(1 + \left(\frac{\nu}{\Delta_1}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{\nu}{\Delta_2}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{\nu}{\Delta_3}\right)\right). \\ (\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3).$$

On décompose S en termes de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{3}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta}\right) + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta}\right) = \frac{1}{2} Cl(-8\Delta). \\ \sum_{\nu=1}^{\frac{3}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta_x \Delta_\beta}\right) \left(\frac{\nu^2}{\Delta_\gamma}\right) + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta_x \Delta_\beta}\right) \left(\frac{\nu^2}{\Delta_\gamma}\right) = B_{\alpha, \beta}. \\ (x, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \\ \sum_{\nu=1}^{\frac{3}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta_x}\right) \left(\frac{\nu^2}{\Delta_\beta \Delta_\gamma}\right) + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{8}\Delta} \left(\frac{\nu}{\Delta_x}\right) \left(\frac{\nu^2}{\Delta_\beta \Delta_\gamma}\right) = B_x. \\ \sum_{\nu=1}^{\frac{3}{8}\Delta} \left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right) + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{8}\Delta} \left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right) = C.$$

On a ainsi

$$2S = Cl(-8\Delta) + 2 \sum_x B_x + 2 \sum_\gamma B_{x, \beta} + 2C.$$

La recherche des congruences (mod. 16) de $Cl(-8\Delta)$ exige la connaissance des restes pour le module 8 de B_x , $B_{x, \beta}$, et C . Pour abrégé l'écriture, nous emploierons la notation suivante

$$\sum_{\nu=1}^{[\Delta, r]} \left(\frac{\nu}{\Delta}\right) = S(r, \pm \Delta)$$

ou plus simplement $S(x)$ quand aucune confusion n'est à craindre. On démontre que

$$S(x) = -\left(\frac{-4}{\Delta}\right) S(1-x), \quad (\Delta \text{ impair}).$$

Congruences $B_z \pmod{8}$. — On peut écrire, $S(x)$ désignant ici $S(x, \pm \Delta_z)$

$$\begin{aligned} B_z = & S\left(\frac{3\Delta_\beta \Delta_r}{8}\right) + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) S\left(\frac{1}{8}\Delta_\beta \Delta_r\right) - \left(\frac{\Delta_\beta}{\Delta_z}\right) \left[S\left(\frac{3}{8}\Delta_r\right) + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) S\left(\frac{1}{8}\Delta_r\right) \right] \\ & - \left(\frac{\Delta_r}{\Delta_z}\right) \left[S\left(\frac{3}{8}\Delta_\beta\right) + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) S\left(\frac{1}{8}\Delta_\beta\right) \right] + \left(\frac{\Delta_\beta \Delta_r}{\Delta_z}\right) \left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) S\left(\frac{1}{8}\right) \right]. \end{aligned}$$

En discutant les divers cas qui se présentent, on se trouvera en présence d'expressions telles que $S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{\Delta_z}\right) S\left(\frac{1}{8}\right)$. On remarquera qu'une telle expression est congrue selon le module 2 à $S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{\Delta_z}\right) S\left(\frac{1}{8}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2} Cl(-8\Delta_z)$. Les deux expressions sont en effet de même parité: on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou retranchant $2\left(\frac{-4}{\Delta_z}\right) S\left(\frac{1}{8}\right)$, quantité essentiellement paire.

Notons encore que $Cl(-8\Delta_z) \equiv 1 - \left(\frac{2}{\Delta_z}\right), \pmod{4}$. On trouve

$$B_z \equiv \frac{1}{2} \left(1 + \varepsilon_\beta \left(\frac{\Delta_z}{\Delta_\beta} \right) \right) \left(1 + \varepsilon_r \left(\frac{\Delta_z}{\Delta_r} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{2}{\Delta_z} \right) \right), \pmod{8}$$

$\varepsilon_\beta, \varepsilon_r$ étant définis par

$$\varepsilon_\beta = -\left(\frac{-4}{\Delta_\beta}\right), \text{ si } \left(\frac{2}{\Delta_\beta}\right) = 1; \quad \varepsilon_\beta = \left(\frac{-4}{\Delta_r}\right), \text{ si } \left(\frac{2}{\Delta_\beta}\right) = -1.$$

Congruences $B_{\alpha\beta} \pmod{8}$. — On a symboliquement, $S(x)$ étant ici, $S(x, \pm \Delta_\alpha \Delta_\beta)$

$$B_{\alpha\beta} = S\left(\frac{3}{8}\Delta_r\right) - \left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\alpha \Delta_\beta}\right) S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) \left[S\left(\frac{1}{8}\Delta_r\right) - \left(\frac{\Delta_r}{\Delta_\alpha \Delta_\beta}\right) S\left(\frac{1}{8}\right) \right]$$

Une analyse détaillée établirait les congruences

$$B_{\alpha,\beta} = \left(1 + \varepsilon_{\alpha,\beta} \left(\frac{\Delta_\alpha \Delta_\beta}{\Delta_\gamma}\right)\right) \left\{ \frac{1}{3} C(-8\Delta_\alpha \Delta_\beta) + \left(1 - \left(\frac{-4}{\Delta_\gamma}\right)\right) \left[\frac{\rho_\alpha \rho_\beta}{8}\right] \right\},$$

(mod. 8)

où $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ est égal à -1 , pour $\Delta_\gamma \equiv 1, (\text{mod. } 8)$, et égal à $+1$ dans les autres cas. ρ_α, ρ_β sont ici les restes de la division de $\Delta_\alpha, \Delta_\beta$ par 8. On a ainsi

$$\Delta_\alpha \equiv \rho_\alpha, \Delta_\beta \equiv \rho_\beta, (\text{mod. } 8); 0 < \rho_\alpha < 8, 0 < \rho_\beta < 8.$$

Là $[]$ représente la partie entière de $\frac{\rho_\alpha \rho_\beta}{8}$.

Congruences C. (mod. 8). — On a

$$C = \left[\frac{3\Delta}{8}\right] - \sum_{\alpha} \left[\frac{3\Delta}{8\Delta_\alpha}\right] + \sum_{\alpha} \left[\frac{3\Delta_\alpha}{8}\right] + \left(\frac{-4}{\Delta}\right) \left\{ \left[\frac{\Delta}{8}\right] - \sum_{\alpha} \left[\frac{\Delta}{8\Delta_\alpha}\right] + \sum_{\alpha} \left[\frac{\Delta_\alpha}{8}\right] \right\} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

On trouverait, en désignant par ρ_1, ρ_2, ρ_3 les plus petits restes positifs (mod. 8) de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, les restes suivants de C pour le module 8:

pour $\rho_1=1$, $C=0$

$$\begin{aligned} \rho_1=3, C &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{\rho_2 \rho_3}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{-4}{\rho_2}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{-4}{\rho_3}\right)\right) \\ \rho_1=5, C &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{2}{\rho_2 \rho_3}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{-2}{\rho_2}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{-2}{\rho_3}\right)\right) \\ \rho_1=7, C &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{2}{\rho_2 \rho_3}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{-4}{\rho_2}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{-4}{\rho_3}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{-4}{\rho_2 \rho_3}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{-2}{\rho_2}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{-2}{\rho_3}\right)\right). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à substituer dans

$$2S = Cl(-8\Delta) + 2 \sum_{\alpha} B_{\alpha} + 2 \sum_{\alpha, \beta} B_{\alpha, \beta} + 2C$$

les restes trouvés pour le module huit. Soit

$$\frac{1}{4} Cl(-8\Delta_1\Delta_2\Delta_3) \equiv \mathfrak{I}_{\rho_1, \rho_2, \rho_3} \pmod{4}, \quad 0 \leq \mathfrak{I}_{\rho_1, \rho_2, \rho_3} < 4.$$

On obtient le tableau suivant des $\mathfrak{I}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{1,1,1} &= 0, \quad \mathfrak{I}_{1,1,3} = 1 - \bar{\eta}, \quad \mathfrak{I}_{1,1,5} = 1 - \bar{\eta}, \quad \mathfrak{I}_{1,1,7} = 0, \\ \mathfrak{I}_{1,3,3} &= 0, \quad \mathfrak{I}_{1,3,5} = 1 - \eta_1\eta_3, \quad \mathfrak{I}_{1,3,7} = 1 - \bar{\eta}, \\ \mathfrak{I}_{1,5,5} &= 1 - \eta_1\eta_3, \quad \mathfrak{I}_{1,5,7} = 1 - \bar{\eta} \\ \mathfrak{I}_{1,7,7} &= 0, \\ \mathfrak{I}_{3,3,3} &= 1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right), \quad \mathfrak{I}_{3,3,5} = 1 - \bar{\eta}\eta_3, \quad \mathfrak{I}_{3,3,7} = 1 + \eta_2\eta_3, \\ \mathfrak{I}_{3,5,5} &= 1 + \bar{\eta}, \quad \mathfrak{I}_{3,5,7} = 1 + \eta_3 \\ \mathfrak{I}_{3,7,7} &= 1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right) \\ \mathfrak{I}_{5,5,5} &= 1 + \bar{\eta}, \quad \mathfrak{I}_{5,5,7} = 1 - \eta_2\eta_3, \\ \mathfrak{I}_{5,7,7} &= 1 - \bar{\eta}\eta_3, \\ \mathfrak{I}_{7,7,7} &= 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Les notations employées signifient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta_{\alpha}}{\Delta_{\beta}}\right) &= \eta_{\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ étant pris dans l'ordre } 1, 2, 3. \\ \bar{\eta} &= \text{sgn}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \quad \sigma = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3. \end{aligned}$$

On remarquera que la première partie du tableau ($\rho_1=1$) a la même disposition que (50). Il vient donc, sans changement pour $\Delta_1 \equiv 1 \pmod{8}$

$$\frac{1}{2} Cl(-8\Delta_1\Delta_2\Delta_3) \equiv \begin{cases} 2(1 - \bar{\eta}), & \text{si } \Delta_2 \equiv \Delta_3 + 4, \left(\frac{2}{\Delta_2}\right) = 1. \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{2}{\Delta_2}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{-4}{\Delta_2}\right)\right) (1 - \eta_1\eta_3), & \text{si } \Delta_2 \equiv \Delta_3, \end{cases} \pmod{8}$$

On vérifie rapidement que ces résultats sont identiques aux formules (44-47).

V.

Nous avons trouvé les formules

$$\begin{aligned} Cl(-pq_1q_2\dots q_m) &\equiv (-p|q_1, q_2, \dots, q_m) \\ Cl(-8q_1q_2\dots q_m) &\equiv (-8|q_1, q_2, \dots, q_m) \end{aligned} \pmod{2^{m+1}}$$

La similitude des deux formules montre que les restes de $Cl(-pq_1q_2\dots q_m)$ et $Cl(-8q_1q_2\dots q_m)$ pour le module 2^{m+1} sont identiques, abstraction faite que 8 remplace p dans le second. Un coup d'œil jeté sur le tableau suivant suffit pour s'en convaincre. $-\left(\frac{8}{p}\right)$ y est égal à $\left(\frac{2}{p}\right)-$.

$$\begin{aligned} Cl(-pq) &\equiv 1 - \left(\frac{p}{q}\right), \\ Cl(-8q) &\equiv 1 - \left(\frac{2}{q}\right), \end{aligned} \pmod{4}$$

$$\begin{aligned} Cl(-pq_1q_2) &\equiv \left(1 - \left(\frac{p}{q_1}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p}{q_2}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p}{q_1q_2}\right)\right), \\ &\hspace{15em} \pmod{8} \\ Cl(-8q_1q_2) &\equiv \left(1 - \left(\frac{2}{q_1}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{2}{q_2}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{2}{q_1q_2}\right)\right). \end{aligned}$$

La comparaison d'autres résultats connus nous suggère que la loi est plus générale. Prenons, par exemple, les restes pour le module 4 de $Cl(-pq)$ et $Cl(-8p)$

$$Cl(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{p}{q}\right), \quad Cl(-8p) \equiv 1 - \left(\frac{2}{p}\right).$$

On passe du premier au second par simple substitution de 8 à q . Citons encore les restes pour le module 8 de $Cl(-p_1p_2p_3)$ et $Cl(-8p_1p_2)$.

$$Cl(p_1 p_2 p_3) \equiv -1 + \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) + \left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right) + \left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right).$$

$$Cl(-8 p_1 p_2) \equiv -1 + \left(\frac{2 p_2}{p_1}\right) + \left(\frac{2 p_1}{p_2}\right) - \left(\frac{2}{p_1 p_2}\right).$$

On passe du premier au second par substitution de 8 à p_3 . Introduisons la dénomination suivante.

Etant donné un polynome de symboles de Legendre des éléments $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$, ce polynome est dit *préparé* par rapport à un quelconque des éléments Δ_α , lorsque cet élément Δ_α se trouve au numérateur de tous les symboles de Legendre où il figure.

Cela posé, voici l'énoncé de la loi générale:

1. *Etant donné le reste de $Cl(-p p_1 p_2 \dots p_{2m} q_1 q_2 \dots q_n)$, pour le module 2^{2m+n+1} exprimé sous la forme d'un polynome de symboles de Legendre des éléments p, p_α, q_β , préparé par rapport à p , on obtient le reste (mod. 2^{2m+n+1}) relatif à $Cl(-8 p_1 p_2 \dots p_{2m} q_1 q_2 \dots q_n)$ par substitution de 8 à p dans le reste précédent.*

2. *Etant donné le reste de $Cl(-p_1 p_2 \dots p_{2m+1} q q_1 q_2 \dots q_n)$, pour le module 2^{2m+n+2} exprimé sous la forme d'un polynome de symboles de Legendre des éléments p_α, q, q_β , préparé par rapport à q , on obtient le reste (mod. 2^{2m+n+2}) relatif à $Cl(-8 p_1 p_2 \dots p_{2m+1} q_1 q_2 \dots q_n)$ par substitution de 8 à q dans le reste précédent.*

La démonstration de cette proposition, s'appuie sur le lemme suivant: soit $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ des nombres premiers impairs, assujettis à la seule condition particulière

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv \Delta_2 \equiv \dots \equiv \Delta_\mu \equiv 1 \\ \Delta_{\mu+1} &\equiv \Delta_{\mu+2} \equiv \dots \equiv \Delta_m \equiv -1 \end{aligned} \quad (\text{mod. } 4)$$

et soit $F(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m)$ un polynome des symboles de Legendre. $\left(\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\beta}\right)$, $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m)$, préparé par rapport à l'un quelconque Δ_α de ces nombres. Si l'on a identiquement

$$F(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2^k)$$

on a encore identiquement, en substituant dans F 8 à Δ_z .

$$F(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\alpha-1}, 8, \Delta_{\alpha+1}, \dots, \Delta_m) \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2^k).$$

Cela admis, nous constaterons d'abord que la loi énoncée est vraie pour les premières valeurs de m et n . Usant d'un procédé de démonstration connue, nous montrerons que si elle est vérifiée pour toutes les valeurs $m \leq \alpha, n < \beta$, et $m < \alpha, n \leq \beta$, elle subsiste pour $m = \alpha, n = \beta$.

Nous avons obtenu pour $Cl(-p p_1 p_2 \dots p_{2m} q_1 q_2 \dots q_n)$ et $Cl(-8 p_1 p_2 \dots p_{2m} q_1 q_2 \dots q_n)$ les restes suivants pour le module 2^{2m+n+1} (voir form. 18 et 39)

$$\begin{aligned} Cl(-p p_1 p_2 \dots p_{2m} q_1 q_2 \dots q_n) &= \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \sum_{\rho, \sigma}^{\prime} (-p \Delta_{\rho_{2\mu}} Q_{\sigma_{\nu}}, \Delta'_{\rho_{2\mu}} Q'_{\sigma_{\nu}}) \\ &\quad Cl(-p \Delta_{\rho_{2\mu}} Q_{\sigma_{\nu}}) \quad (a) \\ &+ \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^n \sum_{r, s} (-\Delta_{r_{2\mu+1}} Q_{s_{\nu}}, p \Delta'_{r_{2\mu+1}} Q'_{s_{\nu}}) Cl(-\Delta_{r_{2\mu+1}} Q_{s_{\nu}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cl(-8 p_1 p_2 \dots p_{2m} q_1 q_2 \dots q_n) &= \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\nu=0}^n \sum_{\rho, \sigma}^{\prime} (-8 \Delta_{\rho_{\alpha}} Q_{\sigma_{\nu}}, \Delta'_{\rho_{\alpha}} Q'_{\sigma_{\nu}}) \\ &\quad Cl(-8 \Delta_{\rho_{\alpha}} Q_{\sigma_{\nu}}) \quad (b) \end{aligned}$$

Lè signe ' dans Σ' signifie que dans la sommation indiquée, le cas $\mu = m, \nu = n$ n'est pas compris. Δ, Δ', Q, Q' sont définis par les relations

$$\begin{aligned} \Delta_{\rho_{\alpha}} &= p_{\rho_1} p_{\rho_2} \dots p_{\rho_{\alpha}}, \quad \Delta'_{\rho_{\alpha}} = p_{\rho_{\alpha+1}} p_{\rho_{\alpha+2}} \dots p_{\rho_{2m}}. \\ Q_{\sigma_{\alpha}} &= q_{\rho_1} q_{\sigma_{\alpha}} \dots q_{\sigma_{\alpha}}, \quad Q'_{\sigma_{\alpha}} = q_{\sigma_{\alpha+1}} q_{\sigma_{\alpha+2}} \dots q_{\sigma_n}. \end{aligned}$$

La substitution purement formelle de 8 à p dans (a) donne

$$\begin{aligned} Cl(-8 p_1 p_2 \dots p_{2m} q_1 q_2 \dots q_n) &= \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \sum_{\rho, \sigma}^{\prime} (-8 \Delta_{\rho_{2\mu}} Q_{\sigma_{\nu}}, \Delta'_{\rho_{2\mu}} Q'_{\sigma_{\nu}}) \\ &\quad Cl(-8 \Delta_{\rho_{2\mu}} Q_{\sigma_{\nu}}) \quad (c) \\ &+ \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^n \sum_{r, s} (-\Delta_{r_{2\mu+1}} Q_{s_{\nu}}, 8 \Delta'_{r_{2\mu+1}} Q'_{s_{\nu}}) Cl(-\Delta_{r_{2\mu+1}} Q_{s_{\nu}}). \end{aligned}$$

La démonstration de la loi générale énoncée sera faite si nous montrons que les seconds membres de (b) et (c) sont congrus pour le module 2^{2m+n+1} . En éliminant les parties communes, et passant tous les termes dans le premier membre, cela revient à démontrer que

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{v=0}^n \sum_{\rho, \sigma} (-8\Delta_{\rho_{2\mu-1}} Q_{\sigma_v}, \Delta'_{\rho_{2\mu+1}} Q'_{\sigma_v}) Cl(-8\Delta_{\rho_{2\mu+1}} Q_{\sigma_v}) \\ \pmod{2^{2m+n+1}} \quad (d) \\ + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{v=0}^n \sum_{\rho, \sigma} (-\Delta_{\rho_{2\mu+1}} Q_{\sigma_v}, 8\Delta'_{\rho_{2\mu+1}} Q'_{\sigma_v}) Cl(-\Delta_{\rho_{2\mu+1}} Q_{\sigma_v}) \equiv 0$$

Or, on a (18), $P(D)$ étant nul pour $D > 0$,

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{v=0}^n \sum_{\rho, \sigma} (-q\Delta_{\rho_{2\mu+1}} Q_{\sigma_v}, \Delta'_{\rho_{2\mu+1}} Q'_{\sigma_v}) Cl(-q\Delta_{\rho_{2\mu+1}} Q_{\sigma_v}) \\ \pmod{2^{2m+n+1}} \\ + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{v=0}^n \sum_{\rho, \sigma} (-\Delta_{\rho_{2\mu+1}} Q_{\sigma_v}, q\Delta'_{\rho_{2\mu+1}} Q'_{\sigma_v}) Cl(-\Delta_{\rho_{2\mu+1}} Q_{\sigma_v}) \equiv 0$$

Si dans cette relation, nous substituons 8 à q , ce qui est permis en vertu du lemme et des hypothèses $\mu < m$, $v \leq n$, on obtient (d) qui est ainsi vérifié; (c) d'où (d) a été tiré est donc vrai et la loi est démontrée dans ce cas.

La seconde partie de la loi générale se démontre de la même manière.

Nous pouvons en faire une application à la recherche des restes pour le module 32 de $Cl(-8\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)$. Les différentes formes de discriminants qui se présentent sont au nombre de 5, à savoir $-8p_1p_2p_3p_4$, $-8p_1p_3p_4q$, $-8p_1p_2q_1q_2$, $-8pq_1q_2q_3$, $-8q_1q_2q_3q_4$. Nous n'aurons qu'à utiliser les résultats des formules (26-28).

I. $m=4$, $-8p_1p_2p_3p_4$. On obtient les congruences relatives à ce discriminant en remplaçant p_5 par 8 dans les formules (26). Notons

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \eta_3, \left(\frac{p_2}{p_3}\right) = \eta_1, \left(\frac{p_3}{p_1}\right) = \eta_2, \left(\frac{2}{p_4}\right) = \mu$$

$$\sigma = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3; \Delta = p_1p_2p_3p_4.$$

Représentons par le schéma

$$\begin{pmatrix} \pm, \pm, \pm \\ \pm, \pm, \pm \end{pmatrix}$$

l'ensemble des conditions

$$\begin{aligned} \pm \left(\frac{p_1}{p_4}\right) &= \pm \left(\frac{p_2}{p_4}\right) = \pm \left(\frac{p_3}{p_4}\right) = \varepsilon_1 \\ &(\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1); \\ \pm \left(\frac{2}{p_1}\right) &= \pm \left(\frac{2}{p_2}\right) = \pm \left(\frac{2}{p_3}\right) = \varepsilon_2 \end{aligned}$$

on a le tableau suivant, pour le module 32.

$$1. \quad \begin{pmatrix} +, +, + \\ +, +, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1 \mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right).$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1 \mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right) + 2(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1 \mu)(1 + \eta_1 \eta_2).$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} +, +, + \\ +, +, - \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$Cl(-8\Delta) = 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_2 \mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) + 2(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_2 \mu)(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, - \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) = (1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) [(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1 \mu) + 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)].$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, -, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) = 2(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) \left[(1 - \varepsilon_1 \mu)(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_1) + (1 + \varepsilon_1 \mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \varepsilon_1 \varepsilon_1 \right) \right] \\ + 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) [(1 - \varepsilon_1 \mu)(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) + (1 + \varepsilon_1 \mu)(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)].$$

II. $m=4$. $-8p_1 p_2 p_3 q$. On obtient les congruences relatives à ce discriminant en remplaçant q_2 par 8 dans les formules (27), préparées par rapport à q_2 .

Notons les abréviations

$$\left(\frac{p_1}{p_2} \right) = \eta_3, \quad \left(\frac{p_2}{p_3} \right) = \eta_1, \quad \left(\frac{p_3}{p_1} \right) = \eta_2, \quad \left(\frac{2}{q} \right) = \mu.$$

$$\sigma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \Delta = p_1 p_2 p_3 q.$$

Le schéma $\begin{pmatrix} \pm, \pm, \pm \\ \pm, \pm, \pm \end{pmatrix}$

représentant les conditions

$$\pm \left(\frac{p_1}{q} \right) = \pm \left(\frac{p_2}{q} \right) = \pm \left(\frac{p_3}{q} \right) = \varepsilon_1 \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1) \\ \pm \left(\frac{2}{p_1} \right) = \pm \left(\frac{2}{p_2} \right) = \pm \left(\frac{2}{p_3} \right) = \varepsilon_2$$

on obtient le tableau suivant de restes pour le module 32:

$$1. \quad \begin{pmatrix} +, +, + \\ +, +, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2 \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) [(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) + (1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-\mu)].$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +, +, + \\ +, +, - \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv$$

$$\begin{cases} 4(1-\mu)(1+\eta_1\eta_2) + 4(1-\varepsilon) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right), & \text{si } \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q} \right) = \left(\frac{2}{p_1 p_2 p_3} \right) = \varepsilon, \\ 4(1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) + 4(1-\varepsilon)(1+\eta_1\eta_2), & \text{si } \pm \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q} \right) = \mp \left(\frac{2}{p_1 p_2 p_3} \right) = -\varepsilon. \end{cases} \quad (1)$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, - \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right)$$

$$+ 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[2(1+\eta_1\eta_2) + (1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) \right].$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, -, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2(1+\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[(1-\varepsilon_1\mu)(1+\eta_2\eta_3) + (1-\varepsilon_1)(1-\eta_2\eta_3) \right. \\ \left. + (1+\varepsilon_2) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) \right] \\ + 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[(1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) + 2(1+\eta_1\eta_2) \right].$$

$$\alpha \text{ doit \u00eatre pris tel que } \left(\frac{p_\alpha}{q} \right) = \left(\frac{2}{p_\alpha} \right) = -1.$$

(1) Les signes sup\u00e9rieurs se rapportent au premier sch\u00e9ma; les signes inf\u00e9rieurs au second.

III. $m=4$, $-8p_1p_2q_1q_2$. Les congruences relatives à ce discriminant pour le module 32 s'obtiennent par simple substitution de 8 à p_3 dans les formules (27) pour $Cl(-p_1p_2p_3q_1q_2)$. Si nous introduisons les notations

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \eta_3, \left(\frac{2}{p_1}\right) = \eta_2, -\left(\frac{2}{p_2}\right) = \eta_1, \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = \mu,$$

$$\tau = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \Delta = p_1p_2q_1q_2.$$

et le schéma $\begin{pmatrix} \pm, \pm, \pm \\ \pm, \pm, \pm \end{pmatrix}$ pour les conditions

$$\pm\left(\frac{p_1}{q_1}\right) = \pm\left(\frac{p_2}{q_1}\right) = \pm\left(\frac{2}{q_1}\right) = \varepsilon_1,$$

$$\pm\left(\frac{p_1}{q_2}\right) = \pm\left(\frac{p_2}{q_2}\right) = \pm\left(\frac{2}{q_2}\right) = \varepsilon_2$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$)

nous aurons formellement les formules (27) :

$$1. \quad \begin{pmatrix} +, +, + \\ +, +, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2 \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) [(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + (1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)(1 - \mu)].$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv$$

$$\begin{cases} 4(1 - \mu)(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) + 4(1 - \varepsilon) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right), & \text{si } \left(\frac{2p_1p_2}{q_1} \right) = \left(\frac{2p_1p_2}{q_2} \right) = \varepsilon, \\ 4(1 - \mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) + 4(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2), & \text{si } \left(\frac{2p_1p_2}{q_1} \right) = -\left(\frac{2p_1p_2}{q_2} \right) = -\varepsilon. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, - \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) \\ + 2(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2) \left[2(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) + (1 - \mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) \right].$$

4.

$$\begin{pmatrix} +, +, - \\ +, -, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv$$

$$2(1+\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[(1-\varepsilon_1\mu)(1+\eta_2\eta_3) + (1-\varepsilon_1)(1-\eta_2\eta_3) + (1+\varepsilon_2) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) \right] \\ + 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[(1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right) + 2(1+\eta_1\eta_3) \right].$$

α doit être tel que $\alpha = 1, 2$ si $\left(\frac{p_\alpha}{q_1} \right) = \left(\frac{p_\alpha}{q_2} \right) = -1$, et $\alpha = 3$,
si $\left(\frac{2}{q_1} \right) = \left(\frac{2}{q_2} \right) = -1$.

IV. $m=4$, $-8pq_1q_2q_3$. Pour obtenir les restes du nombre des classes relatives à ce discriminant pour le module 32, il suffit de substituer 8 à q_4 dans les formules (28). On obtient immédiatement les développements ci-dessous.

1.

$$\begin{pmatrix} +, +, + \\ +, +, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)(1-\eta) + 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-\mu)(1+\eta).$$

2.

$$\begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2(1-\varepsilon_2\mu) [(1+\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2\eta) + (1-\varepsilon_1)(1-\eta_1\eta_2)] \\ + 2(1-\varepsilon_2)(1-\mu)(1+\varepsilon_1\eta_1\eta_2). \quad (55)$$

3.

$$\begin{pmatrix} +, +, + \\ +, +, - \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv 2(1-\varepsilon_1\mu) [(1+\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1\eta) + (1-\varepsilon_2)(1-\eta_1\eta_2)] \\ + 2(1-\varepsilon_1)(1-\mu)(1+\varepsilon_2\eta_1\eta_2).$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, - \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) = 2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1-\eta) + 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)[(1-\mu)(1+\eta) + 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)].$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} +, +, - \\ +, -, + \end{pmatrix}$$

$$Cl(-8\Delta) \equiv$$

$$\begin{aligned} & 4(1-\mu)(1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) + 4(1+\varepsilon_1)(1-\eta) + 4(1+\mu)(1-\varepsilon_1), \text{ si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ & 8(1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) + 4(1-\mu)(1-\eta), \text{ si } \varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \text{ avec } \left(\frac{qr}{p}\right) = \left(\frac{2}{qr}\right) = 1. \\ & (x, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Les abréviations employées sont

$$\begin{aligned} \left(\frac{q_1}{q_2}\right) &= \varepsilon_3, \left(\frac{q_2}{q_3}\right) = \varepsilon_1, \left(\frac{q_3}{q_1}\right) = \varepsilon_2, \left(\frac{2}{p}\right) = \mu. \\ \eta &= \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \Delta = pq_1q_2q_3. \end{aligned}$$

Le schéma $\begin{pmatrix} \pm, \pm, \pm \\ \pm, \pm, \pm \end{pmatrix}$ représente les conditions

$$\begin{aligned} \pm\left(\frac{q_1}{p}\right) &= \pm\left(\frac{q_2}{p}\right) = \pm\left(\frac{q_3}{p}\right) = \varepsilon_1 \\ & (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1) \\ \pm\left(\frac{2}{q_1}\right) &= \pm\left(\frac{2}{q_2}\right) = \pm\left(\frac{2}{q_3}\right) = \varepsilon_2. \end{aligned}$$

V. $m=4$, $-8q_1q_2q_3q_4$. Les formules (28) donnent immédiatement la solution de ce cas; il suffit d'y substituer 8 à p .

Notons

$$\begin{aligned} \left(\frac{q_1}{q_2}\right) &= \varepsilon_3, \left(\frac{q_2}{q_3}\right) = \varepsilon_1, \left(\frac{q_3}{q_1}\right) = \varepsilon_2, \left(\frac{2}{q_4}\right) = \mu. \\ \eta &= \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \Delta = q_1q_2q_3q_4. \end{aligned}$$

En représentant encore par le schéma $\begin{pmatrix} \pm, \pm, \pm \\ \pm, \pm, \pm \end{pmatrix}$ l'ensemble des conditions

$$\begin{aligned} \pm\left(\frac{2}{q_1}\right) &= \pm\left(\frac{2}{q_2}\right) = \pm\left(\frac{2}{q_3}\right) = \varepsilon_1, \\ &(\varepsilon_1, \varepsilon_2, = \pm 1) \quad (56) \\ \pm\left(\frac{q_1}{q_4}\right) &= \pm\left(\frac{q_2}{q_4}\right) = \pm\left(\frac{q_3}{q_4}\right) = \varepsilon_2, \end{aligned}$$

on obtient un tableau qui est formellement identique à (28).

VI.

Le présent chapitre est consacré aux congruences relatives aux classes $Cl(-4D)$.

A. Considérons l'expression

$$S = \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta} \left(\frac{D}{v}\right) \left(1 + \left(\frac{D_1}{v}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{D_2}{v}\right)\right) \dots \left(1 + \left(\frac{D_m}{v}\right)\right) \quad (57)$$

où $D_1, D_2, \dots, D_m$ sont des discriminants fondamentaux impairs premiers entre eux; $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ leurs valeurs absolues; $D = D_1 D_2 \dots D_m$, $\Delta = |D|$.

Un terme quelconque du second membre est égal à 2^m , si

$$\left(\frac{D_1}{v}\right) = \left(\frac{D_2}{v}\right) = \dots = \left(\frac{D_m}{v}\right) = 1.$$

Il est nul dans toute autre hypothèse. Nous aurons donc, symboliquement

$$S = 2^m \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta} {}^*1$$

Effectuant les produits au second membre, il se présente une somme

$$S_0 = \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta} \left(\frac{D^2}{v}\right)$$

et une série de termes dont le type général est

$$A = \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta'Q} \left(\frac{D' Q^v}{v} \right), \quad \Delta'Q = \Delta, \quad |D'| = \Delta',$$

où D' et Q sont impairs. On a, (4),

$$S_0 = \frac{1}{4} \Phi(\Delta) + \frac{1}{4} \sum_{\delta\delta'=\Delta} (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} \mu(\delta).^{(1)}$$

La transformation (2) donne pour A :

$$A = \sum_{d(Q)} \mu(d) \left(\frac{D'}{d} \right) \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta'Q'} \left(\frac{D'}{v} \right), \quad \text{où } Q' = \frac{Q}{d},$$

d parcourant les diviseurs de Q . k étant le reste de la division de Q' par 4, on a

$$\frac{1}{4} \Delta'Q' = \Delta' \frac{Q'-k}{4} + \frac{k}{4} \Delta'.$$

Par suite,

$$A = \sum_{d(Q)} \mu(d) \left(\frac{D'}{d} \right) \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}k\Delta'} \left(\frac{D'}{v} \right).$$

La discussion des deux hypothèses $D' \geq 0$, la remarque

(1) Il est facile de donner la valeur de cette sommation. Remarquons, à cet effet, que $(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}$ est égal à $\left(\frac{-4}{\delta'} \right)$. Il vient ainsi

$$\frac{1}{4} \sum_{\delta\delta'=\Delta} (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} \mu(\delta) = \frac{1}{4} \left(\frac{-4}{\Delta} \right) \sum_{\delta(\Delta)} \left(\frac{-4}{\delta} \right) \mu(\delta) = \frac{1}{4} \left(\frac{-4}{\Delta} \right) (-4, \Delta).$$

Cette expression n'est donc différente de zéro que lorsque aucun des facteurs premiers de Δ n'est de la forme $4n+1$ — elle est égale dans ce cas à $(-1)^m 2^{m-2}$, m étant le nombre des facteurs premiers de Δ .

$\left(\frac{-4}{k}\right) = \left(\frac{-4}{d}\right) \left(\frac{-4}{Q}\right)$, ainsi que l'emploi des formules (8) et (9) — on remarquera dans ces formules que Δ' est impair — donne

$$A = (\overline{D'}, \overline{Q}) \, I(D'),$$

ces nouveaux symboles étant définis par les relations

$$\begin{aligned} (\overline{D}, \overline{Q}) &= \left(\frac{-4}{Q}\right) (-4D, Q), \quad I(D) = \frac{1}{2} Cl(-4D), \quad \text{pour } D > 0 \\ (\overline{D}, \overline{Q}) &= \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau} (D, Q), \quad I(D) = Cl(D), \quad \text{pour } D < 0. \end{aligned} \quad (58)$$

(57) s'exprime alors comme suit:

$$\begin{aligned} 2^m \sum_1^* 1 &= \frac{1}{4} \Phi(\Delta) + \frac{1}{4} \left(\frac{-4}{\Delta}\right) (-4, \Delta) \\ &+ \sum_{a=1}^m \sum_{r_1 \dots r_a} (\overline{D_{r_1}} \overline{D_{r_2}} \dots \overline{D_{r_a}}, \overline{\Delta_{r_{a+1}}} \dots \overline{\Delta_{r_m}}) I(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}). \end{aligned} \quad (59)$$

On pourrait partir de cette formule pour déterminer les restes de $Cl(-4D)$ pour un module pair.

B. On peut déterminer ces restes d'une autre manière. Reprenons le calcul de (33) dans l'hypothèse $D_0 = -4$. Il vient encore ici

$$S_0 = \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta} \left(\frac{D^2}{v}\right) = \frac{1}{4} \Phi(\Delta)$$

La valeur de $A = \sum_{v=1}^{\frac{1}{4}\Delta'Q} \left(\frac{D'Q^2}{v}\right)$ a déjà été calculée pour D' pair.

On avait trouvé

$$A = ((D', Q)) \, K(D').$$

Pour D' impair, le raisonnement fait dans le cas $Q \equiv 0, (\text{mod. } 8)$, n'est plus valable ici. Soit donc, à calculer

$$A = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}\Delta'Q} \left(\frac{D'Q^\nu}{\nu} \right)$$

sous les hypothèses: D' fondamental impair, Q multiple impair de 4. Il vient (2)

$$A = \sum_{d|Q} \mu(d) \left(\frac{D'}{d} \right)^{\frac{1}{4d}\Delta'Q} \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4d}\Delta'Q} \left(\frac{D'}{\nu} \right).$$

Quand d est impair, $\frac{Q}{4d}$ est entier, les sommes en ν y relatives sont nulles. Quand d est pair, divisible par 4, $\mu(d)$ est égal à zéro: le terme correspondant de A disparaît; notons, enfin, pour d pair, non divisible par 4, $\frac{Q}{2d} = Q'$ (Q' est impair). Il vient, à cause de

$$\frac{1}{2} \Delta' Q' = \Delta' \frac{Q'-1}{2} + \frac{1}{2} \Delta',$$

$$A = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}\Delta'} \mu(d) \left(\frac{D'}{d} \right)^{\frac{1}{2}\Delta'} \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}\Delta'} \left(\frac{D'}{\nu} \right), (d \text{ parcourt les diviseurs pairs de } Q).$$

Posons $d=2\delta$; $\mu(d)$ est égal à $-\mu(\delta)$. Donc,

$$A = - \left(\frac{2}{D'} \right) \sum_{\delta \left(\frac{Q}{4} \right)} \mu(\delta) \left(\frac{D'}{\delta} \right)^{\frac{1}{2}\Delta'} \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}\Delta'} \left(\frac{D'}{\nu} \right).$$

L'emploi des relations (30) nous permet d'écrire, $\sum_{\delta} \mu(\delta) \left(\frac{D'}{\delta} \right)$

étant égal à $\left(D', \frac{Q}{4} \right)$,

$$A = - \left(\frac{2}{D'} \right) \left(D', \frac{Q}{4} \right) \overline{Cl(D')}.$$

Rappelons la signification de $Cl(D)$.

$$\text{pour } D > 0, \overline{Cl(D)} = 0,$$

$$\text{pour } D < 0, \overline{Cl(D)} = 2 \cdot \frac{2 - \left(\frac{2}{\Delta} \right)}{\tau} Cl(D).$$

Il viendra donc généralement :

$$\begin{aligned} 2^{m+1} \sum_1^* 1 &= \frac{1}{4} \Phi(\Delta) + \sum_{a=0}^m \sum_{r_1 \dots r_a}^m ((-4D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m})) K(-4D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}) \\ &- \sum_{a=1}^m \sum_{r_1 \dots r_a}^m \left(\frac{2}{D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}} \right) (D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) Cl(\overline{D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}}) \\ & \quad (D = -4D_1 D_2 \dots D_m, \Delta = |D|, \Delta_\mu = |D_\mu|). \end{aligned} \quad (60)$$

On remarquera que $\frac{1}{4} \Phi(\Delta) = \frac{1}{2} \Phi(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m)$.

Nous supposons, pour tout ce qui suit, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ premiers et différents.

1. Soit $D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}$ négatif, égal à $-\Delta'$. Notons encore pour simplifier, $\Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m} = Q$. On a

$$\overline{Cl(-\Delta')} = \frac{2}{\tau} \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta'} \right) \right) Cl(-\Delta').$$

$$K(4\Delta') = \frac{1}{2} Cl(-16\Delta') = \frac{2}{\tau} \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta'} \right) \right) Cl(-\Delta').$$

En groupant les termes $((4\Delta', Q)) K(4\Delta')$, $-\left(\frac{2}{\Delta'} \right) (-\Delta', Q) \overline{Cl(-\Delta')}$, qui correspondent dans les deux sommations du second membre de (60) au déterminant négatif $-\Delta'$, il viendra, puisque $((4\Delta', Q))$ est égal à $\left(\frac{-4}{Q} \right) (-\Delta', Q)$.

$$(-\Delta', Q) \frac{2}{\tau} \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta'} \right) \right) \left(\left(\frac{-4}{Q} \right) - \left(\frac{2}{\Delta'} \right) \right) Cl(-\Delta').$$

L'aggrégat ainsi formé est congru à 0 pour le module 2^m (1). L'ensemble des termes de (60), pour lesquels $D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}$ est négatif, peut ainsi toujours être groupé en aggrégats divisibles par 2^m : il est lui-même divisible par ce nombre.

Si $D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}$ est positif, égal à D' , on a

$$\overline{Cl(D')} = 0, K(-4D') = Cl(-4D'), ((-4D', Q)) = (-4D', Q).$$

Remarquons encore que $((-4, \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m)) K(-4)$ qui est égal à $\frac{1}{2} (-4, \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m)$ est congru à $\frac{1}{2} \Phi(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m)$, selon le module 2^m . On a, en effet,

$$\Phi(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_m) = \left(1 - \left(\frac{-4}{\Delta_1} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{-4}{\Delta_2} \right) \right) \dots \left(1 - \left(\frac{-4}{\Delta_m} \right) \right), \pmod{2^{m+1}}.$$

Leur somme est donc divisible par 2^m .

Au vu de ces résultats, (60) donne, pour le module 2^m :

$$\sum (-4D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) Cl(-4D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}) \equiv 0, \quad (a)$$

(la sommation s'étend à toutes les combinaisons $D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}$ positives, a variant de 1 à m).

Prenons dans (60) $m=1$, $D_1 > 0$; il vient, (a)

$$Cl(-4D_1) \equiv 0, \pmod{2}.$$

En prenant $m=2$, $D_1 D_2 > 0$, on trouverait encore

$$Cl(-4D_1 D_2) \equiv 0, \pmod{4}.$$

(1) Il y a une exception possible: le cas $\Delta' = 3$. $\frac{2}{\tau}$ est alors égal à $\frac{1}{3}$. L'exception se lève comme suit: on multiplie par 3 les deux membres de (60); on rentre ainsi dans le cas ordinaire, la multiplication par 3 n'altérant pas les congruences.

La loi générale est évidente. Il suffit de s'appuyer sur la remarque

$$(-4D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) \equiv 0, \pmod{2^{m-a}}$$

pour établir, par récurrence, $D_1 D_2 \dots D_m$ étant > 0 ,

$$Cl(-4D_1 D_2 \dots D_m) \equiv 0, \pmod{2^m} \quad (61)$$

Le nombre des classes $Cl(-4D)$ d'un discriminant fondamental négatif $-4D$ est divisible par 2^m , m étant le nombre des facteurs premiers de D .

2. Quand $D_1, D_2, \dots, D_m$ sont positifs, égaux à $q_1, q_2, \dots, q_m$, toute la seconde partie du second membre de (60) est nulle; on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \Delta_{2m+1} \sum_{i=1}^* 1 &= \frac{1}{2} \Phi(q_1 q_2 \dots q_m) \\ &+ \sum_{a=0}^m \sum_{r_1 \dots r_a} (-4q_{r_1} q_{r_2} \dots q_{r_a}, q_{r_{a+1}} \dots q_{r_m}) \frac{2}{\tau} Cl(-4q_{r_1} q_{r_2} \dots q_{r_a}). \end{aligned}$$

En opérant comme plus haut, on trouverait encore

$$\begin{aligned} Cl(-4q_1 q_2 \dots q_m) &\equiv \frac{1}{2} \Phi(q_1 q_2 \dots q_m) \\ &+ \sum_{a=0}^{m-1} \sum_{r_1 \dots r_a} (-4q_{r_1} q_{r_2} \dots q_{r_a}, q_{r_{a+1}} \dots q_{r_m}) \frac{2}{\tau} Cl(-4q_{r_1} q_{r_2} \dots q_{r_a}). \end{aligned} \quad (\text{mod. } 2^{m+1}) \quad (62)$$

Le premier terme du second membre $\frac{1}{2} \Phi(q_1 q_2 \dots q_m)$ est lui-même divisible par 2^{m+1} , lorsque $m \geq 2$. On trouverait encore, en introduisant la symbolique (19),

$$Cl(-4q_1 q_2 \dots q_m) \equiv \frac{1}{2} \sum_r (-4q_{r_1} | q_{r_2} \dots q_{r_a}) \Phi(q_{r_1}), \pmod{2^{m+1}}. \quad (63)$$

3. Déterminons maintenant les congruences pour le module 16 de $Cl(-4D)$ pour D composé de trois facteurs. Voici

auparavant les formules de M. Lerch dans le cas de deux facteurs. (1)

$$Cl(-4p_1p_2) \equiv 2 - \left(\frac{2}{p_1}\right) \left(1 + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right) - \left(\frac{2}{p_2}\right) \left(1 + \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right) \pmod{8} \quad (64)$$

$$Cl(-4q_1q_2) \equiv \left(1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{2}{q_1q_2}\right)\right)$$

Je noterai encore

$$Cl(-4q) \equiv 1 - \left(\frac{2}{q}\right), \quad (\text{mod. } 4).$$

Dans le cas de trois facteurs, deux cas se présentent : $Cl(-4p_1p_2q)$ et $Cl(-4q_1q_2q_3)$.

I. $m=3$, $D_1=-p_1$, $D_2=-p_2$, $D_3=q$.

On aura, (60), pour le module 16 :

$$\begin{aligned} Cl(-4p_1p_2q) &\equiv \left(1 - \left(\frac{p_1p_2}{q}\right)\right) Cl(-4p_1p_2) \\ &+ \sum_{\alpha, \beta} \left(1 + \left(\frac{2}{p_\alpha q}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{p_\alpha q}{p_\beta}\right)\right) Cl(-p_\alpha q) \\ &+ \sum_{\alpha, \beta} \left(1 + \left(\frac{2}{p_\alpha}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right) Cl(-p_\alpha) \\ &+ \left(1 + \left(\frac{q}{p_1}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{q}{p_2}\right)\right) Cl(-4q) + \frac{1}{2} \Phi(p_1p_2q), \quad (z, \beta = 1, 2). \end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{2} \Phi(p_1p_2q) \equiv 4 \left(1 - \left(\frac{2}{q}\right)\right), \quad (\text{mod. } 16).$$

Les abréviations $\left(\frac{2}{p_\alpha}\right) = \varepsilon_\alpha$, $\left(\frac{2}{q}\right) = \varepsilon$; $\left(\frac{p_\alpha}{q}\right) = \varepsilon_\alpha$, $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \varepsilon$ ($\alpha=1, 2$) ainsi que les restes connus de $Cl(-4p_1p_2)$, etc. pour les modules 8, 4, ... etc. donnent, pour le module 16,

(1) Comparer avec le premier tableau d'Hurwitz.

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv (1-\epsilon_1\epsilon_2) [2-\epsilon_1(1+\mu)-\epsilon_2(1+\mu)] \\ + \sum_{\alpha,\beta} (1+\epsilon_\alpha) \left(1+\left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\epsilon_\beta\right) (1-\epsilon_\alpha) + \sum_{\alpha,\beta} (1+\epsilon_\alpha) \left(1+\left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) (1-\epsilon_\alpha) \\ + (1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)(1-\epsilon) + 4(1-\epsilon), \quad (\alpha,\beta=1,2). \quad (a)$$

Passons à la discussion des différentes hypothèses.

1. $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon=1$. Le premier et le dernier terme s'annulent. Les autres donnent au second membre

$$2 \sum_{\alpha,\beta} \left(1+\left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\epsilon_\beta\right) (1-\epsilon_\alpha) - 2 \sum_{\alpha,\beta} \left(1+\left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) (1-\epsilon_\alpha).$$

Mettant en facteurs les quantités $1-\epsilon_\alpha$, on obtient deux expressions congrues en même temps à 0 ou à 8. Donc

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv 0.$$

2. $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon=-1$. La substitution de ces valeurs donne

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv \\ 4(1-\epsilon_1\epsilon_2) + 2 \sum_{\alpha,\beta} \left(1+\left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\epsilon_\beta\right) (1-\epsilon_\alpha) + 2(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2) + 8$$

expression que l'on simplifie par l'étude séparée des hypothèses $\epsilon_1=\epsilon_2, \epsilon_1=-\epsilon_2$. Elle se réduit à

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv 2(1-\epsilon_1\epsilon_2)(1-\mu\epsilon_1)$$

3. $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon=1$. La présence du facteur nul $1+\epsilon\epsilon_\alpha$ annule la première sommation de (a). Le premier terme s'annule aussi. Il reste, au second membre

$$2 \sum_{\alpha,\beta} \left(1+\left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)\right) (1-\epsilon_\alpha) + 2(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2) + 8.$$

On le transforme aisément en $2(1-\epsilon_1\epsilon_2)(1+\mu\epsilon_1)$, (mod. 16)

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv 2(1-\epsilon_1\epsilon_2)(1+\mu\epsilon_1).$$

4. $\epsilon_1=\epsilon_2=-\epsilon=-1$. La seconde et la troisième sommation, ainsi que les deux derniers termes de (a) s'annulent,

grâce à la présence des facteurs $1 + \varepsilon_\alpha$, $1 + \varepsilon_\alpha$, $1 - \varepsilon$. Il reste ainsi

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv 4(1 - \eta_1\eta_2).$$

5. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon = 1$. Les termes ($z=2$) des deux sommations sont nuls. Il vient

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv 2(1+\nu)(1-\varepsilon_1\eta_2) + 2(1+\nu\eta_2)(1-\eta_1) + 2(1+\mu)(1-\eta_1).$$

Retranchons le dernier terme du second, ce qui n'altère pas la congruence, on aura

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv 2(1-\eta_1\eta_2)(1+\mu) + 2(1-\eta_1)(1-\eta_2).$$

6. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon = -1$. Les termes ($z=2$) de la première, ($z=1$) de la seconde sommation de (a) s'annulent. Le second membre

$$2(1-\mu)(1-\varepsilon_1\eta_2) + 2(1+\mu\eta_2)(1-\eta_1) + 2(1-\nu)(1-\eta_2) + 2(1+\eta_1)(1+\eta_2) + 8.$$

est congru à $4(1-\eta_2)$; donc,

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv 4(1-\eta_2).$$

Le tableau ci-dessous résume la discussion :

$$Cl(-4p_1p_2q) \equiv \begin{cases} 0, & \text{pour } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 1 \\ 4(1-\eta_\alpha), & \text{pour } \varepsilon_\alpha = 1, \varepsilon_\beta = \varepsilon = -1 \\ 2(1+\nu\mu)(1-\varepsilon_1\eta_2) + 2(1-\eta_1)(1-\eta_2), & \text{pour } \varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = \varepsilon = 1 \\ 2(1-\eta_1\eta_2)(1+\mu\varepsilon_1\eta_1), & \text{pour } \varepsilon = -1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2. \end{cases} \quad (65)$$

(mod. 16)

$$\left(\begin{array}{l} p_1, p_2, q, \text{ nombres premiers impairs, les deux premiers} \\ \text{de la forme } 4n+3, \text{ le dernier de la forme } 4n+1. \\ \left(\frac{2}{p_z} \right) = \varepsilon_z, \left(\frac{2}{q} \right) = \varepsilon; \left(\frac{p_\alpha}{q} \right) = \varepsilon_\alpha, \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = \mu, \quad (z=1, 2) \end{array} \right)$$

II. $m=3$, $D_1=q_1$, $D_2=q_2$, $D_3=q_3$.

Il vient (63)

$$Cl(-4q_1q_2q_3) \equiv \frac{1}{2} \sum_{z,\beta,\gamma} (-4q_\alpha \mid q_\beta, q_\gamma) \Phi(q_\alpha), (\text{mod. } 16), (z,\beta,\gamma=1,2,3).$$

Voici le développement de cette formule, écrit au moyen des notations

$$\left(\frac{q_x}{q_\beta}\right) = \varepsilon_\gamma; \left(\frac{2}{q_x}\right) = \varepsilon_\alpha, \quad \eta = \operatorname{sgn}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$$

$$\begin{aligned} Cl(-4q_1q_2q_3) &\equiv \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (1 - \varepsilon_\alpha) [(1 - \eta_\alpha \eta_\beta)(1 - \eta_\gamma) + (1 - \eta_\alpha \eta_\gamma)(1 - \eta_\beta) + (1 - \eta_\beta)(1 - \eta_\gamma)] \quad (a) \\ &\equiv \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (1 - \eta_\beta \eta_\gamma)(1 - \eta_\alpha)(1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma) + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (1 - \eta_\beta)(1 - \eta_\gamma)(1 - \varepsilon_\alpha). \end{aligned}$$

4 cas se présentent.

1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. Les facteurs $1 - \varepsilon_\alpha, 1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma$ sont nuls. Il s'ensuit

$$Cl(-4q_1q_2q_3) \equiv 0.$$

2. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$. La première somme s'annule identiquement, $1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma$ étant nul. Il reste donc au second membre de (a)

$$2 \sum_{\alpha} (1 - \eta_\beta)(1 - \eta_\gamma)$$

qui, comme nous l'avons montré, a pour reste $4(1 - \eta)$ pour le module 16.

$$Cl(-4q_1q_2q_3) \equiv 4(1 - \eta).$$

3. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1$. $1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma$ ne s'annule que pour $\alpha = 3, 1 - \varepsilon_\alpha$ que pour $\alpha = 1, 2$. Par suite,

$$Cl(-4q_1q_2q_3) \equiv 2 \sum_{\alpha=1,2} (1 - \eta_3 \eta_\gamma)(1 - \eta_\alpha) + 2(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)$$

ou encore, plus simplement

$$Cl(-4q_1q_2q_3) \equiv 4(1 - \eta)$$

4. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -1$. On a ici,

$$Cl(-4q_1q_2q_3) \equiv 2 \sum_{\alpha=1,2} (1 - \eta_\beta \eta_\gamma)(1 - \eta_\alpha) + 2 \sum_{\alpha=1,2} (1 - \eta_3)(1 - \eta_\alpha)$$

Retranchons la seconde somme de la première; on trouve

$$Cl(-4q_1q_2q_3) \equiv 2 \sum_{\alpha=1,2} (1-\eta_\alpha)(1-\eta_{\beta'}).$$

Le second membre, se composant de groupes de termes égaux est divisible par 16.

$$Cl(-4q_1q_2q_3) \equiv 0.$$

Ces 4 cas se laissent condenser dans la formule unique

$$Cl(-4q_1q_2q_3) \equiv 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(1-\eta), \pmod{16} \quad (66)$$

$$\left(\begin{array}{l} q_1, q_2, q_3, \text{ nombres premiers de la forme } 4n+1. \\ \left(\frac{2}{q_\alpha} \right) = \varepsilon_\alpha, \left(\frac{q_\alpha}{q_\beta} \right) = \eta_\alpha, \eta = \text{sgn}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \end{array} \right)$$

On remarquera la simplicité de cette congruence.

Un cas particulièrement simplé de (62) est le suivant

$$Cl(-4q_1q_2\dots q_m) \equiv 0, \pmod{2^{m+1}} \quad (67)$$

si $q_1, q_2, \dots, q_m$ sont des nombres premiers de la forme $8n+1$.

VII.

Les recherches qui précèdent reposent toutes sur la considération d'expressions particulières dont la forme générale serait

$$S = \sum_{\nu=1}^{n\Delta} \left(\frac{D}{\nu} \right) \left(1 + \left(\frac{D_1}{\nu} \right) \right) \left(1 + \left(\frac{D_2}{\nu} \right) \right) \dots \left(1 + \left(\frac{D_m}{\nu} \right) \right) f(\nu). \quad (a)$$

($D=D_1D_2\dots D_m, \Delta = |D|$; $D, D_1, D_2, \dots, D_m$ discriminants fondamentaux). Nous examinerons rapidement quelques cas de discriminants positifs: les résultats n'auront naturellement pas la même forme simple ni la même importance.

A. Soit

$$S = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \log 2 \sin \frac{\nu\pi}{\Delta} \left| \left(\frac{D}{\nu} \right) \left(1 + \left(\frac{D_1}{\nu} \right) \right) \left(1 + \left(\frac{D_2}{\nu} \right) \right) \dots \left(1 + \left(\frac{D_m}{\nu} \right) \right) \right| \quad (68)$$

où $D_1, D_2, \dots, D_m$ sont des discriminants fondamentaux impairs, $D=D_1D_2\dots D_m$ est supposé fondamental, $\Delta = |D|$.

Notre symbolique donne

$$S = 2^m \sum_1^{\Delta} \log \left| 2 \sin \frac{s\pi}{\Delta} \right|.$$

D'autre part, S se décompose en

$$S_0 = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D^2}{\nu} \right) \log \left| 2 \sin \frac{\nu\pi}{\Delta} \right|$$

et en termes du type

$$A = \sum_{\nu=1}^{\Delta'Q-1} \left(\frac{D'Q^2}{\nu} \right) \log \left| 2 \sin \frac{\nu\pi}{\Delta'Q} \right|, \quad (\Delta'Q = \Delta).$$

On a d'abord, (2),

$$S_0 = \sum_{d(\Delta)} \mu(d) \sum_{\nu=1}^{d'-1} \log \left| 2 \sin \frac{\nu\pi}{d'} \right|, \quad (dd' = \Delta, d' > 1).$$

Dans la relation connue

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \log \left| 2 \sin \pi \left(x + \frac{\alpha}{m} \right) \right| = \log | 2 \sin m\pi x | \quad (69)$$

que nous pouvons encore écrire

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} \log \left| 2 \sin \pi \left(x + \frac{\alpha}{m} \right) \right| = \log \left| \frac{\sin m\pi x}{\sin \pi x} \right|,$$

nous passons à la limite $x=0$; il vient

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} \log \left| 2 \sin \frac{\alpha\pi}{m} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left| \frac{\sin m\pi x}{\sin \pi x} \right| = \log m.$$

Par suite,

$$S_0 = \sum_{dd'=\Delta} \mu(d) \log d' = \log \prod d'^{\mu(d)}$$

Lorsque m est plus grand que 1, $\prod d'^{\mu(d)}$ est égal à 1, et $S=0$; pour $m=1$, il vient $S_0 = \log \Delta$.

Étudions maintenant les expressions A. On a

$$A = \sum_{d|Q} \mu(d) \left(\frac{D'}{d}\right) \sum_{a=1}^{\Delta' Q_d - 1} \left(\frac{D'}{a}\right) \log \left| 2 \sin \frac{\pi}{\Delta' Q_d} \right|.$$

(d parcourt les diviseurs de Q).

Posons $\alpha = h + \Delta' \rho$ ($h = 1, 2, \dots, \Delta'$; $\rho = 0, 1, 2, \dots, Q_d - 1$), il vient, en remarquant que

$$\sum_{\rho=0}^{Q_d-1} \log \left| \sin \pi \left(\frac{h}{\Delta' Q_d} + \frac{\rho}{Q_d} \right) \right| = \log \left| 2 \sin \frac{h\pi}{\Delta'} \right|,$$

$$A = \sum_{d|Q} \mu(d) \left(\frac{D'}{d}\right) \sum_{h=1}^{\Delta'-1} \left(\frac{D'}{h}\right) \log \left| 2 \sin \frac{h\pi}{\Delta'} \right|.$$

La sommation en h est égale à $-Cl(D') \log E(D') - E(D')$ est l'unité de Fermat $\frac{T+U\sqrt{D'}}{2}$ — si $D' > 0$; elle est nulle, si $D' < 0$.

Notons $F(D) = 0$, si $D < 0$

$F(D) = Cl(D) \log E(D)$, si $D > 0$.

On aura

$$2^m \sum_1^{\Delta} \log \left| 2 \sin \frac{s\pi}{\Delta} \right| = \alpha \log \Delta \quad (70)$$

$$- \sum_{a=1}^m \sum_{r_1 \dots r_a} (D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}, \Delta_{r_{a+1}} \dots \Delta_{r_m}) F(D_{r_1} D_{r_2} \dots D_{r_a}).$$

α est égal à 1, si $m = 1$; il est nul, si $m > 1$.

Cette formule est l'analogie de (15) pour les discriminants positifs.

Si $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ sont des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_m$ de la forme $4n+3$, on a, m étant supposé > 1 ,

$$\sum_1^{p_1 p_2 \dots p_m} \log \left| 2 \sin \frac{s\pi}{p_1 p_2 \dots p_m} \right| = 0 \quad (71)$$

Pour $m=1$, $\Delta_1=p$, nombre premier de la forme $4n+3$, on trouverait

$$\prod_1^p \sin \frac{s\pi}{p} = \frac{\sqrt{p}}{2^{\frac{p-1}{2}}}. \quad (72)$$

B. On obtiendrait des formules analogues en partant de $f(v) = \log \left| \operatorname{tg} \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{h}{\Delta} \right) \right|$ et en remarquant que

$$Cl(4\Delta) \log E(4\Delta) = \sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h} \right) \log \left| \operatorname{tg} \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{h}{\Delta} \right) \right|.$$

Ces développements étant sans importance, nous n'indiquerons pas ici les résultats obtenus dans cette voie.

C. En partant de l'expression

$$S = \sum_{v=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{v} \right) e^{\frac{2k\pi v i}{\Delta'}} \prod_{\rho=1}^m \left(1 + \left(\frac{D_\rho}{v} \right) \right)$$

(k premier à Δ' ; $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ nombres premiers différents; $D_1, D_2, \dots, D_m$ discriminants de valeurs absolues $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$; $D = D_1 D_2 \dots D_m$, $\Delta = |D|$; $\Delta' = \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_\mu$, $\mu < m$; $\Delta' \Delta'' = \Delta$), M. Lerch ⁽¹⁾ a obtenu la formule

$$2^m \sum^* e^{\frac{2k\pi i}{\Delta'}} = \frac{\Phi(\Delta)}{\Phi(\Delta')} (-1)^\mu \prod_{\rho=1}^\mu \left(1 - \left(\frac{k \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_{\rho-1} \Delta_{\rho+1} \dots \Delta_\mu}{\Delta_\rho} \right) \sqrt{D_\rho} \right) \quad (73).$$

(1) LERCH. — Sav. Etrang. p. 178; Acta Math. t. 30, p. 257. Cette formule est susceptible de généralisation.

En appliquant cette formule aux développements trigonométriques de $\frac{1}{2} - x$, $\log |2 \sin x \pi|$, nous retrouverons les résultats (15) et (70). La marche du calcul étant parallèle dans les deux cas, nous ne considérerons que $\log |2 \sin x \pi|$. Nous allons auparavant donner une autre forme à (73) par un léger changement d'écriture.

Soit $\Delta = p_1 p_2 \dots p_m q_1 q_2 \dots q_n$, $\Delta' = p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_\alpha} q_{s_1} q_{s_2} \dots q_{s_\beta}$.
 $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$ étant un ensemble de α objets pris parmi l'ensemble $1, 2, \dots, m$; et $s_1, s_2, \dots, s_\beta$ un ensemble de β objets pris parmi l'ensemble $1, 2, \dots, n$. On pose encore

$$\Delta' \Delta'' = \Delta$$

et les p_μ, q_ν satisfont à la congruence $-p_\mu \equiv q_\nu \equiv 1, (\text{mod. } 4)$. Nous noterons encore, pour simplifier

$$P_{r_{1,\alpha}} = p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_\alpha}, \quad P'_{r_{1,\alpha}} = p_{r_{\alpha+1}} p_{r_{\alpha+2}} \dots p_{r_n} \\
Q_{s_{1,\beta}} = q_{s_1} q_{s_2} \dots q_{s_\beta}, \quad Q'_{s_{1,\beta}} = q_{r_{\beta+1}} q_{r_{\beta+2}} \dots q_{r_n}.$$

Il vient

$$2^{m+n} \sum^* e^{\frac{2ks\pi i}{\Delta'}} = \\
(-1)^{\alpha+\beta} + \sum_{\mu=1}^{\alpha} \sum_{\nu=1}^{\beta} \sum_{\rho, \sigma} (-1)^{\mu+\nu} \prod_{\delta=1}^{\mu} \left(\frac{k P_{\rho_{1,\delta-1}} P_{\rho_{\delta+1,\alpha}} Q_{\sigma_{1,\beta}}}{p_{\rho_\delta}} \right) \sqrt{-p_{\rho_\delta}} \prod_{\varepsilon=1}^{\nu} \left(\frac{k P_{\rho_{1,\alpha}} Q_{\sigma_{1,\varepsilon-1}} Q_{\sigma_{\varepsilon+1,\beta}}}{q_{\sigma_\varepsilon}} \right) \sqrt{q_{\sigma_\varepsilon}} \quad (74)$$

la sommation ρ, σ devant être étendue à toutes les combinaisons (μ, ν) des termes de la suite $P_{r_{1,\alpha}} Q_{s_{1,\beta}}$, qui elle-même est contenue dans $P_{1,m} Q_{1,n} = \Delta$.

Égalons dans (74) les parties réelles des deux membres. On obtient, après quelques légères transformations

$$2^{m+n} \sum_1^{\Delta} \cos \frac{2ks\pi}{P_{r_{1,\alpha}} Q_{s_{1,\beta}}} = \\
\Phi(P'_{r_{1,\alpha}} Q'_{s_{1,\beta}}) \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} \sum_{\nu=0}^{\beta} \sum_{\rho, \sigma} (-1)^{\alpha+\beta+\nu} \left(\frac{P_{\rho_{1,2\mu}} Q_{\sigma_{1,\nu}}}{k P'_{\rho_{1,2\mu}} Q'_{\sigma_{1,\nu}}} \right) \sqrt{P_{\rho_{1,2\mu}} Q_{\sigma_{1,\nu}}} \quad (a)$$

Rappelons la signification de Σ^* . C'est une sommation étendue à toutes les valeurs de s telles que

$$\left(\frac{s}{p_1}\right) = \left(\frac{s}{p_2}\right) = \dots = \left(\frac{s}{p_m}\right) = \left(\frac{s}{q_1}\right) = \left(\frac{s}{q_2}\right) = \dots = \left(\frac{s}{q_n}\right) = 1. \quad (b)$$

$$0 < s < \Delta$$

La formule connue $-\log |2 \sin x\pi| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx\pi}{k}$ peut

être décomposée comme suit, en groupant ensemble les termes (k) premiers à un quelconque des diviseurs de Δ .

$$-\log |2 \sin x\pi| =$$

$$\lim_{u=\infty} \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n \sum_{r,s} \sum_{k=1}^{u'} \left(\frac{P_{r, \alpha} Q_{s, \beta}}{k} \right)^2 \frac{\cos 2kx\pi P'_{r, \alpha} Q'_{s, \beta}}{k P'_{r, \alpha} Q'_{s, \beta}}$$

où $u' = \left[\frac{u}{P'_{r, \alpha} Q'_{s, \beta}} \right]$. Posons dans cette identité, $x = \frac{s}{\Delta}$ et ajoutons, en faisant parcourir à s toutes les valeurs réalisant les conditions (b). On aura

$$-2^{m+n} \sum_1^{\Delta} \log \left| 2 \sin \frac{s\pi}{\Delta} \right| = \quad (c)$$

$$\lim_{u=\infty} \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n \sum_{r,s} \sum_{k=1}^{u'} \left(\frac{P_{r, \alpha} Q_{s, \beta}}{k} \right)^2 \sum_1^{\Delta} \frac{\cos \frac{2ks\pi}{\Delta} P'_{r, \alpha} Q'_{s, \beta}}{k P'_{r, \alpha} Q'_{s, \beta}}.$$

En tenant compte de (a) le second membre devient:

$$\sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n \sum_{r,s} \lim_{u=\infty} \sum_{k=1}^{u'} \left(\frac{P_{r, \alpha} Q_{s, \beta}}{k} \right)^2 \frac{\Phi(P'_{r, \alpha} Q'_{s, \beta})}{P'_{r, \alpha} Q'_{s, \beta}}$$

$$\left[\frac{\alpha}{2} \right] \sum_{\mu=0}^g \sum_{\nu=0}^g (-1)^{\alpha+\beta+\nu} \sum_{\rho, \sigma} \left(\frac{P_{\rho, 2\mu} Q_{\sigma, \nu}}{k P_{\rho, 2\mu+1, \alpha} Q_{\sigma, \nu+1, \beta}} \right) \frac{\sqrt{P_{\rho, 2\mu} Q_{\sigma, \nu}}}{k}$$

Intervertissons l'ordre des sommations.

$$\lim_{u=\infty} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]_n} \sum_{v=0}^m \sum_{r,s} \sum_{\alpha=2\mu}^n \sum_{\beta=v}^n \sum_{\rho,\sigma} (-1)^{r+\beta+v} \frac{\Phi(P'_{\rho_1}, Q'_{\sigma_1, \beta})}{P'_{\rho_1, \alpha} Q'_{\sigma_1, \beta}} \left(\frac{P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}}{P_{\rho_1+1, \alpha} Q_{\sigma_1+1, \beta}} \right) \\ \sum_{k=1}^{u'} \left(\frac{P_{\rho_1+1, \alpha} Q_{\sigma_1+1, \beta}}{k} \right)^2 \left(\frac{P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}}{k} \right) \frac{\sqrt{P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}}}{k}$$

La sommation r, s s'étend à toutes les combinaisons $P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}$ prises dans $\Delta = P_{1, m} Q_{1, n}$. La sommation ρ, σ s'étend à toutes les combinaisons $P'_{\rho_1, m} Q'_{\sigma_1, \beta}$ contenues dans $P'_{r_1, 2\mu} Q'_{s_1, v}$.

Arrêtons-nous au calcul de l'élément suivant, en supposant μ, v différents de zéro.

$$A = \lim_{u=\infty} \sum_{k=1}^{u'} \left(\frac{P_{\rho_1+1, \alpha} Q_{\sigma_1+1, \beta}}{k} \right)^2 \left(\frac{P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}}{1} \right) \frac{\sqrt{P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}}}{k}$$

Il vient, en faisant usage de la transformation (2)

$$A = \sum_{\delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \left(\frac{P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}}{\delta} \right) \lim_{u=\infty} \sum_{k=1}^{u'/\delta} \left(\frac{P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}}{k} \right) \frac{\sqrt{P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}}}{k}$$

(δ étant un diviseur de $P_{\rho_1+1, \alpha} Q_{\sigma_1+1, \beta}$; la sommation (δ) étant étendue à tous ces diviseurs). Une formule fondamentale de Dirichlet montre que

$$\lim_{u=\infty} \sum_{k=1}^u \left(\frac{D}{k} \right) \frac{\sqrt{D}}{k} = Cl(D) \log E(D), \quad (D \text{ discriminant} > 0).$$

Ainsi

$$A = Cl(P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}) \log E(P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}) \sum_{\delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \left(\frac{P_{r_1, 2\mu} Q_{s_1, v}}{\delta} \right).$$

Par suite, le second membre de (c) s'écrira, en appelant B le terme ($\mu=v=0$)

$$B + \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{v=0}^n \sum_{r,s} Cl(P_{r,2\mu} Q_{s,1,v}) \sum_{\alpha=2\mu}^m \sum_{\beta=v}^n \sum_{\rho,\sigma} (-1)^{\alpha+\beta+v} \\ \frac{\Phi(P'_{\rho,1,\alpha} Q'_{\sigma,1,\beta})}{P'_{\rho,1,\alpha} Q'_{\sigma,1,\beta}} \sum_{\delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \left(\frac{P_{r,2\mu} Q_{s,1,v}}{\delta'} \right) \\ (\delta\delta' = P_{\rho,2\mu+1,\alpha} Q_{\sigma,v+1,\beta}).$$

Remarquant que $\mu(\delta) = \mu(\delta') \mu(\delta\delta')$ et $\mu(\delta\delta') = (-1)^{\alpha+\beta+v}$ nous écrirons la dernière partie de la seconde expression, comme suit, en intervertissant les sommations et groupant les termes relativement à δ' .

$$\sum_{\alpha=2\mu}^m \sum_{\beta=v}^n \sum_{\rho,\tau} \mu(P_{\rho,2\mu+1,\alpha} Q_{\sigma,v+1,\beta}) \left(\frac{P_{r,2\mu} Q_{s,1,v}}{P_{\rho,2\mu+1,\alpha} Q_{\sigma,v+1,\beta}} \right) \sum_{\varepsilon=\alpha}^m \sum_{\eta=\beta}^n \sum_{t,\tau} \frac{\Phi(P'_{t,1,\varepsilon} Q'_{\tau,1,\eta})}{P'_{\rho,1,\alpha} Q'_{\sigma,1,\beta}}$$

La sommation relative à t, τ comprend toutes les combinaisons $P'_{t,1,\varepsilon} Q'_{\tau,1,\eta}$ prises dans $P'_{\rho,1,\alpha} Q'_{\sigma,1,\beta}$. Cette sommation parcourt ainsi tous les diviseurs de $P'_{\rho,1,\alpha} Q'_{\sigma,1,\beta}$ sans répétition. Nous appliquerons ici la formule (3). En remarquant encore, l'égalité (5)

$$\sum_{\alpha=2\mu}^m \sum_{\beta=v}^n \sum_{\rho,\tau} \mu(P_{\rho,2\mu+1,\beta} Q_{\sigma,v+1,\beta}) \left(\frac{P_{r,2\mu} Q_{s,1,v}}{P_{\rho,2\mu+1,\alpha} Q_{\sigma,v+1,\beta}} \right) = (P_{r,2\mu} Q_{s,1,v}, P'_{r,2\mu} Q'_{s,1,v})$$

le second membre de (c) se réduira à

$$B + \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{v=0}^n \sum_{r,s} (P_{r,2\mu} Q_{s,1,v}, P'_{r,2\mu} Q'_{s,1,v}) Cl(P_{r,2\mu} Q_{s,1,v}) \log E(P_{r,2\mu} Q_{s,1,v})$$

Il reste à calculer B. On a

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n (-1)^{\alpha+\beta} \sum_{\rho,\sigma} \frac{\Phi(P'_{\rho,1,\alpha} Q'_{\sigma,1,\beta})}{P'_{\rho,1,\alpha} Q'_{\sigma,1,\beta}} \sum_{k=1}^u \left(\frac{P_{\rho,1,\alpha} Q_{\sigma,1,\beta}}{k} \right)^2 \frac{1}{k}.$$

La transformation (2) le ramène à

$$B = \lim_{u=\infty} \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n (-1)^{\alpha+\beta} \sum_{\sigma, \rho} \frac{\Phi(P'_{\rho_{1,\alpha}} Q'_{\sigma_{1,\beta}})}{P'_{\rho_{1,\alpha}} Q'_{\sigma_{1,\beta}}} \sum_{\delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \sum_{k=1}^{\frac{u'}{\delta}} \frac{1}{k}.$$

(δ parcourt les diviseurs de $P_{\rho_{1,\alpha}} Q_{\sigma_{1,\beta}}$)

C'est la présence des sommes $\sum_{k=1}^{\frac{u'}{\delta}} \frac{1}{k}$, qui deviennent infinies

à la limite $u=\infty$, qui sépare l'analyse de B de l'analyse précédente. Pour tourner la difficulté, calculons les coefficients de la sommation en k pour une valeur déterminée de $\delta' = \delta P'_{\rho_{1,\alpha}} Q'_{\sigma_{1,\beta}}$. Ce coefficient est égal à

$$(-1)^{m+n} \mu(\delta') \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\rho, \sigma} \frac{\Phi(P'_{\rho_{1,\alpha}} Q'_{\sigma_{1,\beta}})}{\delta'}$$

les sommations pour α, β étant telles que $P'_{\rho_{1,\alpha}} Q'_{\sigma_{1,\beta}}$ parcourt tous les diviseurs de δ' . Par suite (3), la sommation en (α, β) , (ρ, σ) est égale à $\sum_{\delta''(\delta')} \frac{\Phi(\delta'')}{\delta'} = 1$ et il vient simplement

$$B = (-1)^{m+n} \lim_{u=\infty} \sum_{\delta'(\Delta)} \mu(\delta') \sum_{k=1}^{\frac{u}{\delta'}} \frac{1}{k}$$

Chacun des termes de B a une limite infinie, la série harmonique étant divergente, mais la relation connue

$$\lim_{r=\infty} \left(\sum_{k=1}^r \frac{1}{k} - \log r \right) = C.$$

où C est la constante d'Euler, montre aisément que si $m=1$, $n=0$, $B = -\log p_1$ et que $B=0$, dans tous les autres cas. Il vient donc finalement

$$2^{m+n} \sum_1^{\Delta} \log \left| 2 \sin \frac{s\pi}{\Delta} \right| = \alpha \log \Delta$$

$$- \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \sum_{\nu=0}^n \sum_{r,s} (P_{r,2\mu} Q_{s,1,\nu}, P'_{r,2\mu} Q'_{s,1,\nu}) Cl(P_{r,2\mu} Q_{s,1,\nu}) \log E(P_{r,2\mu} Q_{s,1,\nu}) \quad (70^{bis})$$

($\Delta = P_{1,m} P_{1,n}$; $\alpha = 1$ si $m=1, n=0$; $\alpha=0$, dans tous les autres cas). Ce résultat est un cas particulier de la formule (70) (1).

En égalant les parties imaginaires de (74) et en introduisant le développement trigonométrique de $\frac{1}{2} - \alpha$, on retrouverait la formule (15) sous l'hypothèse que les $D_1, D_2, \dots, D_m$ sont des nombres premiers.

APPENDICE

Le calcul des formules (26-28) est trop long pour que nous puissions en faire figurer tous les détails dans ce mémoire. Aussi nous bornerons-nous à indiquer les procédés à employer pour simplifier le calcul et à traiter un cas complètement, uniquement dans le but de montrer la méthode à suivre. L'établissement des formules ne présentera aucune difficulté au lecteur qui voudra bien prendre la peine de lire ce qui suit.

1. Remarquons, en premier lieu, qu'il ne se présente ici que des congruences pour le module 32 et que les différents termes de la formule (18) pour $n=5$ sont tous nuls ou divisibles par 16; sans altérer la congruence, on pourra donc les affecter indifféremment du signe + ou —.

2. Pour la même raison, on peut, sans altérer la congruence, supprimer les termes répétés un nombre pair de fois.

(1) Les cas particuliers $\Delta = q_1 q_2$, $\Delta = p_1 p_2$, ont été obtenus par M. Lerch, au moyen de cette méthode (voir Sav. Etrang. p. 179-188).

Par exemple, pour le discriminant $-p_1 p_2 p_3 q_1 q_2$, sous l'hypothèse $\begin{pmatrix} +, +, + \\ +, +, + \end{pmatrix}$, $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$, on obtient d'abord

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) \equiv & 2(1-\mu)(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1) + 2(1-\mu)(1-\eta_3)(1+\eta_2) \\ & + 2(1-\mu)(1+\eta_3)(1-\eta_1) + 2(1-\mu)(1-\eta_2)(1+\eta_1) + 2(1-\mu)(1-\eta_3)(1+\eta_2) \\ & + 2(1-\mu)(1+\eta_3)(1-\eta_1) + 2(1-\mu)(1-\eta_2)(1+\eta_1). \end{aligned}$$

La suppression des termes répétés deux fois ramène à

$$Cl(-\Delta) \equiv 2(1-\mu)(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1).$$

3. On simplifiera très souvent les formules en groupant les termes suivant les facteurs de la forme $1+z$, $1-z$, où $z = \pm 1$, s'il s'en présente. En calculant ensuite séparément les congruences obtenues pour $\mu=1$, $\mu=-1$, on obtient souvent des résultats plus simples. Prenons un exemple. Dans l'analyse relative à $-p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$, on obtient pour le schéma $\begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, + \end{pmatrix}$ sous les hypothèses $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=1$ la congruence

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) \equiv & 16 + 2(1+\eta_1\eta_3)(1+\mu)(1+\eta_2) + 2(1+\eta_2\eta_3)(1+\mu)(1-\eta_1) \\ & + 2(1+\eta_2)(1-\eta_1)(1-\mu) + 4(1+\eta_3)(1-\eta_2) + 4(1-\eta_3)(1+\eta_1). \end{aligned}$$

Nous grouperons les termes en mettant $1+\mu$, $1-\mu$ en facteurs et en effectuant les produits des parenthèses

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) \equiv & 16 + 4(2+\eta_1-\eta_2-\eta_1\eta_3-\eta_2\eta_3) \\ & + 2(1+\mu)(2-\eta_1+\eta_2+\eta_1\eta_3+\eta_2\eta_3) + 2(1-\mu)(1-\eta_1+\eta_2-\eta_1\eta_2). \end{aligned}$$

Pour $\mu=1$, il vient $Cl(-\Delta) \equiv 0$, et pour $\mu=-1$, $Cl(-\Delta) \equiv 4(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1)$. En écrivant

$$Cl(-\Delta) = 2(1-\mu)(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1)$$

on satisfait au cas $\mu=1$ et au cas $\mu=-1$. C'est donc la formule simplifiée.

4. L'introduction de symboles tels que

$$\bar{\eta} = \text{sgn}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \quad \sigma = |\eta_1 + \eta_2 + \eta_3|$$

permet souvent d'exprimer simplement et élégamment des ag-

grégats difficiles à simplifier. Ainsi, dans le dernier exemple cité, si nous remarquons que $1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1$ est congru à 0 ou à 2 pour le module 4 selon que τ est égal à 1 ou à 3, nous écrirons

$$Cl(-\Delta) \equiv 2(1-\mu)(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1) \equiv 4(1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\tau}\right)\right).$$

Autre exemple : Dans l'analyse relative à $-pq_1q_2q_3q_4$, le calcul du schéma $\begin{pmatrix} +, +, + \\ +, +, + \end{pmatrix}$, sous l'hypothèse $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=-1$, donne

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) &\equiv (1+\mu)Cl(-pq_1q_2q_3) + (1+\eta_1\eta_2)Cl(-pq_1q_2q_4) \\ &+ (1+\eta_1\eta_3)Cl(-pq_1q_3q_4) + (1+\eta_2\eta_3)Cl(-pq_2q_3q_4) + 2(1-\mu)(1+\eta_3) \\ &(1+\eta_2) + 2(1-\mu)(1+\eta_3)(1+\eta_1) + 2(1-\mu)(1+\eta_2)(1+\eta_1) + 8(1-\mu). \end{aligned}$$

En substituant les restes de $Cl(-pq_1q_2q_3), \dots$, etc. calculés par les formules (25), on aura

$$\text{pour } \mu = 1, Cl(-\Delta) \equiv 0$$

$$\begin{aligned} \text{pour } \mu = -1, Cl(-\Delta) &\equiv 8(1+\eta_1\eta_2) + 8(1+\eta_2\eta_3) + 8(1+\eta_3\eta_1) \\ &+ 16 + 4 \sum_{\gamma} (1+\eta_{\alpha})(1+\eta_{\beta}), \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

$$\text{Ou a } 8(1+\eta_1\eta_2) + 8(1+\eta_2\eta_3) + 8(1+\eta_3\eta_1) + 16 \equiv 8(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1) \equiv 0.$$

D'autre part, en analysant séparément les cas $\eta_1=\eta_2=\eta_3$, $\eta_1=\eta_2=-\eta_3$, $\eta_1=-\eta_2=\eta_3$, $-\eta_1=\eta_2=\eta_3$, on constatera que

$$4 \sum_{\gamma} (1+\eta_{\alpha})(1+\eta_{\beta}) \equiv 8(1+\eta).$$

et la formule définitive sera

$$Cl(-\Delta) \equiv 4(1-\mu)(1+\eta).$$

5. Quelques procédés de simplification résultent du fait que les symboles de Legendre ont l'unité pour valeur absolue, On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \eta_1+\eta_2 &\equiv 1+\eta_1\eta_2, \quad \eta_1-\eta_2 \equiv 1-\eta_1\eta_2, \quad (\text{mod. } 4) \\ (1+\eta_1)^2 &\equiv 2(1+\eta_1), \quad (1-\eta_1)^2 \equiv 2(1-\eta_1) \quad (\text{mod. } 8). \end{aligned}$$

6. Enfin, quand par l'application successive de ces remarques, on a obtenu les différentes congruences relatives à un schéma, pour les différentes valeurs de ε_1 et ε_2 , il n'y a plus qu'à rapprocher ces formules les unes des autres pour obtenir les résultats donnés dans les formules (26-28). En voici un exemple emprunté à la formule (26). Pour le schéma $\begin{pmatrix} +, +, - \\ +, -, + \end{pmatrix}$, on trouve successivement

$$1^\circ. \varepsilon_1=1, \varepsilon_2=1, Cl(-\Delta) \equiv 4(1-\mu)(1-\eta_3) + 4(1+\mu)(1+\eta_2)$$

$$2^\circ. \varepsilon_1=-1, \varepsilon_2=-1, Cl(-\Delta) \equiv 4(1-\mu)(1+\eta_1) + 8 \left(1 + 4 \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \eta_1 \right)$$

$$3^\circ. \varepsilon_1=1, \varepsilon_2=-1, Cl(-\Delta) \equiv 4(1+\mu)(1-\eta_1) + 4(1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \eta_1 \right)$$

$$4^\circ. \varepsilon_1=-1, \varepsilon_2=-1, Cl(-\Delta) \equiv 4(1-\mu)(1-\eta_2) + 4(1+\mu)(1+\eta_3).$$

Nous remarquerons que 1° et 4° , ainsi que 2° et 3° présentent une analogie assez grande. Les différences ne tiennent qu'à des changements de signe. On dans 1° μ et η_2 ont le signe de ε_1 dans le facteur $4(1+\mu)(1+\eta_2)$, et dans 4° de même; μ et η_3 ont dans 1° et 4° le signe contraire à ε_1 lorsqu'ils figurent dans l'expression $4(1+\mu)(1+\eta_3)$. En écrivant

$$Cl(-\Delta) \equiv 4[(1+\varepsilon_1\mu)(1+\varepsilon_1\eta_2) + (1-\varepsilon_1\mu)(1-\varepsilon_1\eta_3)]$$

on satisfait aux deux cas 1° et 4° . Ou verrait de même que

$$4 \left[(1+\varepsilon_1\mu)(1-\varepsilon_1\eta_1) + (1-\varepsilon_1\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \varepsilon_1\eta_1 \right) \right]$$

satisfait à 2° et 3° . Et enfin, les cas $(1^\circ, 4^\circ)$, $(2^\circ, 3^\circ)$ ne se différenciant que par le signe de $\varepsilon_1\varepsilon_2$, nous aurons encore

$$Cl(-\Delta) \equiv 2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[(1+\varepsilon_1\mu)(1-\varepsilon_1\eta_1) + (1-\varepsilon_1\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \varepsilon_1\eta_1 \right) \right] \\ + 2(1+\varepsilon_1\varepsilon_2) [(1+\varepsilon_1\mu)(1+\varepsilon_1\eta_2) + (1-\varepsilon_1\mu)(1-\varepsilon_1\eta_3)].$$

C'est la congruence donnée dans la formule (26).

7. Lorsqu'on se propose de calculer systématiquement les congruences (26-28), il est utile de développer complètement la formule (18) pour le cas en question, en se servant d'abré-

viations convenables pour les symboles de Legendre. Cette formule développée écrite, on l'étudie successivement pour chacun des schémas $\begin{pmatrix} \pm, \pm, \pm \\ \pm, \pm, \pm \end{pmatrix}$ *essentielllement* distincts. On pourrait à la rigueur s'arrêter à ce stade et obtenir par de simples transformations les congruences corrélatives, mais il est plus facile et souvent plus rapide de subdiviser l'étude d'un schéma en analysant séparément les diverses hypothèses $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$. Cidessous un exemple relatif au discriminant $-p_1 p_2 p_3 q_1 q_2$ et aux conditions $\begin{pmatrix} +, +, - \\ +, +, - \end{pmatrix}$. Nous distinguerons 4 cas

a. $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1$. On a, (formules p. 25).

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) &\equiv 2(1+\mu)(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1) + 2(1+\mu)(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1) \\ &\quad + 4(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1) + 4(1+\eta_2)(1-\eta_1) + 2(1+\mu)(1+\eta_2)(1-\eta_1) \\ &\quad + 2(1+\mu)(1+\eta_2)(1-\eta_1) + 4(1+\eta_2)(1-\eta_1). \end{aligned}$$

Après suppression des termes répétés deux fois,

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) &\equiv 4(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1) \\ &\equiv 8 \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right). \end{aligned}$$

b. $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1$. Il vient

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) &\equiv 4(1+\mu)(1+\eta_1\eta_2) + 2(1-\mu)(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1) \\ &\quad + 2(1-\mu)(1-\eta_3)(1+\eta_2) + 2(1-\mu)(1+\eta_3)(1-\eta_1) + 2(1-\mu)(1-\eta_2)(1+\eta_1) \\ &\quad + 2(1-\mu)(1-\eta_3)(1-\eta_2) + 2(1-\mu)(1+\eta_3)(1+\eta_1) \\ &\quad + 2(1-\mu)(1+\eta_2)(1-\eta_1). \end{aligned}$$

Le groupement des termes, par mise en facteurs de $1-\mu$, $1+\mu$ donne

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) &\equiv 8(1+\eta_1\eta_2) + 2(1-\mu)(1+\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\eta_3\eta_1) \\ &\equiv 8(1+\eta_1\eta_2) + 4(1-\mu) \left(1 - \left(\frac{-4}{\sigma} \right) \right). \end{aligned}$$

c. $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$. Ce cas se ramène au précédent par permutation de q_1 et de q_2 . On a la même formule

$$Cl(-\Delta) \equiv 8(1+\gamma_1\gamma_2)+4(1-\mu) \left(1-\left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right).$$

$$d. \varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = -1.$$

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) &\equiv 8(1-\mu)(1+\gamma_1\gamma_2)+4(1+\gamma_3)(1-\gamma_2)+4(1-\gamma_3)(1+\gamma_4) \\ &+4(1+\mu)(1-\eta_3)(1-\eta_2)+4(1+\mu)(1+\gamma_3)(1+\gamma_4)+4(1+\gamma_3)(1-\gamma_2) \\ &+4(1-\gamma_3)(1+\gamma_4). \end{aligned}$$

Chaque terme étant ou répété deux fois ou congru à 0 (mod. 32), on aura simplement

$$Cl(-\Delta) \equiv 0.$$

La formule suivante

$$\begin{aligned} Cl(-\Delta) &\equiv 2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \left(1-\left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right) \\ &+2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2) \left[2(1+\gamma_1\gamma_2)+(1-\mu) \left(1-\left(\frac{-4}{\sigma}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

condense les résultats partiels obtenus et représente les congruences relatives aux conditions $\begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & - \end{pmatrix}$, (voir formule (27)).

ERRATA

Page 22, ligne 15, au lieu de 267, lire 9.

Page 23, ligne 5, au lieu de η , lire η_z .

Page 41, ligne 10, au lieu de $\varepsilon_\beta \left(\frac{p_\gamma}{p_r}\right)$, lire $\varepsilon_\beta \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right)$.

TABLE DES MATIÈRES

	<i>Pages</i>
<i>Introduction</i> — Rappel de quelques formules et de quelques notations	7
I. <i>Discriminants fondamentaux impairs</i> — Formules générales de congruences (mod. 2^m). Examen détaillé des cas $m = 1, 2, 3, 4, 5$	14
II. Autre formule conduisant aux résultats du chap. I .	29
III. <i>Discriminants fondamentaux de la forme $-8P$</i> — Congruences générales (mod. 2^m). Cas particuliers $m = 1, 2, 3, 4$	33
IV. Autre méthode pour les discriminants de la forme $-8P$	52
V. <i>Théorème fondamental</i> reliant les congruences relatives à $Cl(-8P)$ et $Cl(-pP)$ — Application à la recherche des congruences (mod. 32) de $Cl(-8\Delta, \Delta, \Delta, \Delta_4)$	58
VI. <i>Discriminants fondamentaux de la forme $-4D$</i> — Congruences (mod. 2^m). Cas particuliers $m = 1, 2, 3$	68
VII. Sur quelques formules obtenues par des méthodes analogues dans le cas des discriminants positifs — Sur l'emploi des développements trigonométriques de $\frac{1}{2} - x$ et $\log 2 \sin x\pi $ pour retrouver les résultats des chap. I et VII	79
<i>Appendice</i> — Remarques sur le calcul des congruences du cas $m=5$, chap. I.	88

CURRICULUM VITAE

Né à Bussy (Cton Fribourg) le 16 janvier 1885, je suis le fils de Donat Plancherel et de son épouse Justine. J'ai suivi les classes techniques du Collège St-Michel à Fribourg, y ait obtenu en 1903 le diplôme de bachelier ès-sciences.

Immatriculé en octobre 1903 à la Faculté des Sciences de l'Université de Fribourg, j'ai subi avec succès en 1906 les examens de la licence ès-sciences. J'ai, durant mes études universitaires suivi les cours ou fréquenté les laboratoires de MM. les Professeurs Lerch, Daniëls, de Kowalski, Bistrzycki, Brunhes, Dalemont. Je les remercie tous de la bienveillance avec laquelle ils m'ont suivi et aidé dans mes études.
